Christian Greiffenhagen

Die Materialität der Mathematik

Wie Mathematik an der Tafel vorgeführt wird

I. Einleitung

Die Mathematik scheint uns vor einen Widerspruch zu stellen.[1] Zum einen wird sie oft als die *abstrakteste* aller Wissenschaften verstanden, als höchste Form reinen Denkens (Platon) und Paradebeispiel apriorischen Wissens (Kant). Es ist verlockend, sich die Mathematik als eine rein mentale Tätigkeit vorzustellen, deren Ort, mysteriös und unbeobachtbar, ›der Geist‹ ist. Zum anderen aber handelt es sich bei der Mathematik um eine eindeutig *materielle* Praxis. Wer Mathematiker beim Ausüben ihres Berufs beobachtet, wird sie selten bloß ›denken‹ sehen. Mathematik zu treiben heißt vor allem: Auf Papier und Tafel zu schreiben. Auch das Vorführen von Mathematik wäre – anders als zum Beispiel in der Philosophie, wo rein mündliche Vorträge problemlos möglich sind – ohne Schriftzeichen und Abbildungen kaum denkbar. So verstanden ist Denken in der Mathematik kein bloß innerer, geistiger Vorgang, sondern heißt vielmehr: auf Papier schreiben, sich mit anderen austauschen, das Geschriebene lesen und lesen lassen. In diesem Sinne arbeiten Mathematiker nicht nur mit dem Kopf, sondern auch mit Händen und Augen (vgl. Latour 1986).

Was die experimentellen Naturwissenschaften angeht, steht deren materielle Dimension schon seit längerer Zeit im Blick der Forschung. Für die theoretischen Disziplinen jedoch ist die Zahl derartiger Studien bislang vergleichsweise gering (vgl. Latour 2008). Was dem Naturwissenschaftler seine Laborausrüstung, ist dem Mathematiker sein Stift und Papier, seine Kreide und Tafel. Daher möchte ich in diesem Beitrag eine

1 Der Beitrag stellt die frühere Fassung eines Aufsatzes dar, der im *British Journal of Sociology* (65, 2014, Heft 3, S. 502–528) erschienen ist. Er beruht auf Überlegungen aus meiner Zeit als Visiting Fellow am ICAR-Labor (Lyon). Ich bin Lorenza Mondada zu Dank verpflichtet, die diesen Aufenthalt ermöglicht hat. Ein Teil dieser Studie wurde durch ein British Academy Postdoctoral Fellowship und ein Simon Research Fellowship der Universität Manchester unterstützt. Die in diesem Beitrag dokumentierten Abbildungen stammen aus einer Videoaufnahme des Autors.

Anregung von Merz und Knorr Cetina aufgreifen (1997: 78): »It might be interesting to look at other formal/mathematical fields more closely from the angle of their work as writing« – und der Vermutung nachgehen, dass ›Mathematik denken‹ immer auch ›Mathematik schreiben‹ heißt: auf Papier und Tafeln, auf Servietten und Bierdeckeln, oder auch mit dem Finger in der Luft.

Dabei konzentriere ich mich auf eine bestimmte Tätigkeit: das Vorführen von Mathematik in universitären Vorlesungen. Solche Vorlesungen sind ein anschauliches Beispiel, wenn es um die schriftliche Natur der Mathematik geht, da in ihnen fast pausenlos geschrieben wird (auch von den Studierenden). Nicht nur beschreiben Dozenten oftmals gleich mehrere Tafeln in einer Sitzung; sie schreiben vor allem die Definitionen, Sätze und Beweise *vollständig aus*. Dies hat zur Folge, dass der Dozent über weite Strecken der Tafel zugewandt ist und ›sprechend schreibt‹, also das, was er notiert, gleichzeitig laut ausspricht. Dieses ›sprechende Schreiben‹ oder ›schreibende Sprechen‹ nimmt zwei Formen an: erstens, Aussprechen, was geschrieben wird; zweitens, Kommentieren, was schon geschrieben ist / geschrieben werden wird, z. B. durch zusätzliche mündliche Bemerkungen (»beachten Sie«), Ausführungen (»das ergibt sich aus diesem ((zeigt auf die Tafel)) Ergebnis von vorhin«) oder Einleitungen (»wir werden jetzt«). Während beispielsweise in der Philosophie die Schrift auf der Tafel oder das Bild auf der Leinwand sich gegenüber dem Sprechen eher als Hilfe oder Unterstützung verhält, sind Sprache und Schrift in der Mathematik eng miteinander verwoben.

Zum Zwecke der didaktischen Darstellung benutzen Mathematikdozenten die Tafel auf eine besondere Weise. Es ist unwahrscheinlich, dass ein Mathematikdozent seine Vorlesung links oben beginnt und von links nach rechts und von oben nach unten weiterschreibt, bis die Tafel voll ist. Stattdessen kommen bestimmten Bereichen der Tafel gesonderte Zwecke zu. So werden beispielsweise vorangegangene Ergebnisse oder der zu beweisende Satz an herausgehobener Stelle platziert (meist oben links oder rechts), während andere Elemente in einen speziellen ›Kladdebereich‹ wandern, der im Gegensatz zum Rest der Tafel immer wieder leergewischt und neu beschriftet wird. Einige dieser Besonderheiten der mathematischen Tafelarbeit möchte ich im Folgenden am Beispiel eines Dozenten und seiner Entwicklung eines konkreten Beweises – des Vollständigkeitssatzes der Aussagenlogik– untersuchen. Das Ziel dabei ist es, eine vor längerer Zeit von Livingston (1986: 225–226) angesprochene Lücke zu schließen: »the exact manner in which blackboard displays are produced has not […] been subjected to examination«.

Meine Beobachtungen in Vorlesungen und informelle Gespräche mit Mathematikern legen die Vermutung nahe, dass die klassische Kreidetafel pädagogische und praktische Vorteile gegenüber anderen Medien hat. Wer einen Beweis nicht als fertige Folie auf die Leinwand wirft und mit einem Laserpointer darüberfährt, sondern ihn Schritt für Schritt in variablem Tempo an der Tafel notiert, gibt seinen Studenten die Möglichkeit, die Entwicklung des Beweises gedanklich in Echtzeit nachzuvollziehen. Da zudem die meisten mathematischen Hörsäle und Seminarräume gleich über mehrere Tafeln verfügen, können Dozenten die Struktur des Beweises, den sie entwickeln, über lange Zeiträume hinweg sichtbar halten, anstatt wie in einer Beamerpräsentation von einer Folie zur nächsten wechseln zu müssen. Wenn es um die Vermittlung von Mathematik geht, scheinen Tafel und Kreide das ideale Medium zu sein. So verwundert es nicht, dass es vor allem die Mathematik und verwandte Fächer wie die theoretische Physik sind, die sich der Einführung von Whiteboards – oder ihrer digitalen Nachfolger – am vehementesten widersetzen.

II. Die Mathematik und ihre Schrift

Die meisten Studien über die Mathematik, vor allem die philosophischen, haben nur wenig über die besondere Rolle des Schreibens zu sagen. Der Platonismus, der Formalismus oder der Intuitionismus behandeln, bei allen Unterschieden, die Mathematik in idealisierter Weise: nicht die Eigenheiten mathematischer Praxis, sondern der ontologische Status mathematischer Objekte oder die Quelle mathematischer Gewissheit stehen bei ihnen im Mittelpunkt.

Von Mathematikern selbst gibt es zwar durchaus praktische Überlegungen zum mathematischen Schreiben, z. B., wie detailliert ein Beweis geschrieben werden sollte, wie man eine gute Definition formuliert, oder ob man »Ich« oder »Wir« verwenden sollte (z.B. Steenrod u.a. 1973; Gillman 1987; Knuth u.a. 1989; Krantz 1997; Higham 1998). Es waren jedoch vor allem Forscher aus anderen Disziplinen (wie der Anthropologie, der Linguistik, der Philosophie oder der klassischen Philologie), die sich explizit mit der Frage der theoretischen Auswirkungen des Schreibens in der Mathematik beschäftigt haben.

Als Klassiker unter diesen Darstellungen gilt Goodys *Domestication of the Savage Mind* (1977). Goody stellt die tradierte Trennung der Denkweisen – irrational vs. rational oder prälogisch vs. logisch – in Frage: die Differenzen zwischen Kulturen verschiedener Räume und Zeiten sind für ihn nicht bloß kognitiver, sondern vor allem technischer Natur (zum Beispiel die Entwicklung alphabetischer Literalität). So ist die Entwicklung der formalen Logik für Goody nicht ohne die Entwicklung der Schrift zu denken, da es im Medium der Schrift wesentlich einfacher ist, die Bestandteile eines Arguments und Syllogismen zu formulieren.

Goody greift Lévy-Bruhls These auf, nach der der Satz vom Widerspruch in ›primitiven‹ Gesellschaften weniger präsent ist als in modernen. Dies führt Goody jedoch nicht auf Unterschiede in den Denkweisen zurück, sondern auf den Umstand, dass formale Widersprüche im Medium der Schrift wesentlich leichter wahrzunehmen sind. Für die Mathematik konstatiert Goody, dass arithmetische Operationen wie das Multiplizieren an Entwicklungen in der Schrift gebunden sind, hier: die Multiplikationstabelle. Zwar sind auch Analphabeten in der Lage zu multiplizieren – das Werkzeug der Schrift erleichtert solche Operationen jedoch erheblich.

Ongs *Orality and Literacy* (1982) folgt im Wesentlichen Goodys Argumentation. So betont Ong, dass die Entwicklung der Logik im alten Griechenland zu dem Zeitpunkt begann, als man die Alphabetschrift verinnerlicht hatte. Vor diesem Hintergrund betrachtet Ong die Studien Lurias (1976), der in den 1930er Jahren Analphabeten in entlegenen Teilen der UdSSR unter anderem die Frage stellte: »Oben im Norden, wo Schnee liegt, sind alle Bären weiß. Nowaja Semlja ist oben im Norden, und dort liegt immer Schnee. Welche Farbe haben dort die Bären?«. Die typische Antwort: »Ich weiß es nicht. *Schwarze* Bären kenne ich. Andere habe ich noch nie gesehen«. Anstatt nun den Unterschied zwischen unserem Denken und dem der Befragten als einen Unterschied in der kognitiven Entwicklung aufzufassen, argumentiert Ong, dass solche Unterschiede vor allem *technologisch,* das heißt durch die unterschiedliche Verbreitung der Schriftsprache in den beiden Gesellschaften bedingt sind.

Unter Rückgriff auf die Semiotik Saussures und Peirces entwickelt Brian Rotman (1993; 2000) eine Darstellung der Mathematik, die ebenfalls das Zusammenspiel von Denken (sich vorstellen) und Schreiben (kritzeln) betont:

> […] *being thought* in mathematics always comes woven into and inseparable from *being written*. […] Thinking in mathematics is always through, by means of, in relation to the manipulation of inscriptions. Mathematics is at the same time a play of imagination and a discourse of written symbols. (Rotman 1993: x)

Um dieser Dimensionen gerecht zu werden, konzipiert Rotman ›den Mathematiker‹ als ein semiotisches Dreieck, das aus Person, Mathematiker und Akteur besteht. Die *Person* bezeichnet ein Subjekt mit einer konkreten Position in Raum und Zeit. Der *Mathematiker* hingegen ist eine transkulturelle, körperlose Abstraktion von der Person und betont die Eigentümlichkeit mathematischen Schreibens, welches nur das immerwährende Präsens kennt und fast völlig ohne Deixis auskommt. Es ist der Mathematiker, der vorstellt und denkt, und der im Schreiben ein fiktives Selbst schafft – den *Akteur* –, welcher nicht den endlichen Begrenzungen des Mathematikers unterworfen ist und daher unendliche Operationen ausführen und unendliche Listen verarbeiten kann. Mit seinem semiotischen Dreieck gelingt es Rotman zu zeigen, dass die großen

Traditionslinien der Philosophie – Platonismus, Intuitionismus, Formalismus – wesentliche Aspekte der mathematischen Praxis unbeachtet lassen.

Auch die Darstellung Edwin Colemans (1988; 1990; 1994) rückt die Rolle der Schrift in den Mittelpunkt. Coleman setzt sich vor allem mit der Philosophie der Mathematik auseinander und entwickelt eine grundlegende Kritik der von ihm so genannten »logisch-formalistischen Hegemonie«. Diese Kritik beruht auf einer detaillierten Darstellung mathematischer Zeichensysteme, derer es nach Coleman vier gibt: Wörter, Abbildungen, Notation (spezielle mathematische Zeichen), und den von ihm als ›Paragraphy‹ bezeichneten Zeichenkomplex aus Elementen wie Fußnoten, Textsatz, und optischer Gestaltung. Das Bemerkenswerte an Colemans Arbeit ist, dass sich seine Darstellung auf eine breite Materialbasis stützt, die von Karten über Baupläne bis hin zu Schulbüchern und Seiten aus Euklids *Elementen* und Freges *Begriffsschrift* reicht.

In jüngerer Zeit hat Kay O'Halloran (1999; 2005) auf Basis von Hallidays systemisch-funktionaler Grammatik eine multimodale Darstellung der Mathematik, bestehend aus Sprache, mathematischem Symbolismus und visuellen Bildern, entwickelt. Ausgehend von Hallidays vier sprachlichen Metafunktionen (erfahrungsbezogen, logisch, interpersonell, textuell) entwirft O'Halloran einen eigenen systemisch-funktionellen Rahmen des mathematischen Symbolismus einerseits und der mathematischen Bildsprache andererseits und kann zeigen, wie sich beide für die integrierte Analyse des mathematischen Diskurses nutzbar machen lassen. Für die vorliegende Studie ist vor allem O'Hallorans Betrachtung mathematischer Räumlichkeit von Bedeutung:

> The use of spatiality is one key element of mathematical symbolism which differs from the line-wrapped syntagmatic arrangement of linguistic text. Such visual arrangements permit easy engagement with the text. This is necessary as the reading path is not necessarily linear in mathematical and scientific texts which consist of language, visual images and symbolism. The use of spatial arrangement also permits ellipsis on a scale which is not found in language. (O'Halloran 2005: 122)

Mit seiner wegweisenden Studie *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics* (1999) legt Netz eine Geschichte der griechischen Mathematik vor, die vor allem auf der materiellen Praxis der griechischen Mathematiker beruht. Die Geschichte der Mathematik, so Netz, habe sich fast ausschließlich auf das beschränkt, was er die ›verbalen‹ Aspekte nennt, und dabei zum Beispiel die beschriftete Abbildung nicht berücksichtigt, obwohl gerade diese grundlegend für die Entstehung der griechischen Mathematik gewesen sei. Anhand einer breiten Auswahl von Beispielen zeigt Netz die gegenseitige Abhängigkeit von Abbildung und Text: dem Text könne man ohne die Abbildung oftmals nur schwer folgen; umgekehrt wäre die Abbildung zu unspezifisch ohne erläuternden

Text. Netz zeigt, wie diese textuellen Praktiken, zusammen mit einem stark beschränkten mathematischen Vokabular, die materielle Basis für die Entwicklung der Deduktion bilden (vgl. Latour 2008).

Netz spezifiziert Goodys These der Bedeutung der Schrift für die griechische Mathematik: nach Netz ist die griechische Mathematik »post-oral, but pre-written«. Sie sei durch die Schrift erst möglich geworden, habe aber in ihrer Form große Teile des mündlichen Erbes beibehalten – sodass beispielsweise die Textgestaltung noch längst nicht eine so zentrale Rolle innehatte wie heute:

> Greek mathematics […] reflects the role of orality, in the use of formulae, in the structure of proofs, and in its reference to an immediately present visual object. But this orality is regimented into a written form, where vocabulary is limited, presentations follow a relatively rigid pattern, and the immediate object is transformed into the written diagram – doubly written, for it is now inscribed with letters, so that even the visual object of mathematics becomes incomprehensible for one's less privileged compatriots. It is at once oral and written […]. (Netz 1999: 297–298)

In ihrer viermonatigen ethnographischen Studie am Max Plank Institut für Mathematik, die das Ziel hatte, die Forscher bei der Generierung neuen mathematischen Wissens zu beobachten, beschäftigt sich Heintz (2000) auch mit der schriftlichen Natur der Mathematik, nämlich dem Prozess des ›Aufschreibens‹ (Heinz 2000: 162): der Umsetzung einer Beweisidee in einen ‚vollständigen' schriftlichen Beweis. Heintz hebt hervor, wie wichtig es ist, die ›richtige‹ Notation zu wählen und wie viel Zeit Mathematiker damit verbringen, eine ›gute‹ Notation zu finden. Heinz bemerkt, dass viele Mathematiker eine persönliche Notation wählen, während sie an einem Problem arbeiten. Dies wäre »more cosy«, wie einer ihrer Gesprächspartner es ausdrückte. Heintz zitiert Halmos (1985), der berichtet, dass er, um eine mathematische Arbeit zu verstehen, diese in seine persönliche Notation übersetzt. Heintz widerlegt damit philosophische Darstellungen der Mathematik, die behaupten, dass die Wahl einer Notation *beliebig* sei. Heintz zeigt, dass die Wahl einer Notation praktische, kommunikative und sogar kognitive Konsequenzen hat.

Materielle Praktiken stehen auch im Mittelpunkt von Rosentals Ethnographie der Logik (2003; 2008). Rosental kann zeigen, dass Logiker in ihrer Arbeit ein breites Arsenal von materiellen Ressourcen einsetzen, darunter nicht nur, aber vor allem das Schreiben auf Blättern, an Tafeln und in Internetforen als Mittel des ›de-monstierens‹ logischer Argumente. Am Beispiel der Entwicklung einer Onlinedebatte über einen Satz über die Fuzzylogik verdeutlicht Rosental den materiellen und visuellen Charakter der von ihm untersuchten logischen Praktiken, wie des Einsatzes bestimmter Schreibtechniken zum Untermauern oder Widerlegen eines Beweises.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Bedeutung des Schreibens für die Mathematik mittlerweile in Studien verschiedenster Fachrichtungen herausgearbeitet wurde. Dabei zeigt sich jedoch auch, dass sich fast alle diese Studien auf ›statische‹ Texte wie Manuskripte, Lehrbücher oder Forschungsartikel beziehen, sodass die Frage nach der *dynamischen* Textproduktion weiterhin ungeklärt ist. Dieser Frage möchte ich am Beispiel der mathematischen Beweisführung an der Tafel nachgehen.

III. Die Tafel in der Mathematik und der Lehre

In der Mathematik ist die Tafel ein Objekt von beinahe ikonischem Rang. Nicht nur sind berühmte Mathematiker und theoretische Naturwissenschaftlicher immer wieder vor ihren Tafeln fotografiert worden (etwa Albert Einstein) – die Tafel fungiert regelmäßig auch als Kulisse für die Konterfeis heutiger Mathematiker auf ihren Webseiten. Auch die Filmbranche kommt in ihrer Darstellung von Mathematik kaum ohne die Tafel aus: zu den bekanntesten Beispielen dürfte die Tafel in *Good Will Hunting* gehören, auf der Matt Damon als Hausmeister heimlich geniale Beweise für Probleme liefert, an denen professionelle Mathematiker scheitern.

Bislang ist die Rolle der Tafel in der wissenschaftlichen Theoriearbeit allerdings nur selten explizit thematisiert worden. Zu den Ausnahmen gehören Suchman und Trigg (1993), die die Funktion von Zeichnungen am Whiteboard in der Forschung zu künstlicher Intelligenz untersuchen, sowie Ochs u.a. (1994; 1996), die für Abbildungen in physikalischen Vorträgen zeigen konnten, wie sprachliche Praktiken mit Zeichen auf der Tafel verknüpft sind. Beide Arbeiten liefern damit wesentliche Grundlagen für die folgende Analyse, welche die Funktion der Tafel in der Mathematikvorlesung in den Blick nimmt.

Tafeln sind aus modernen Bildungseinrichtungen kaum wegzudenken. Nach Hamilton (1990: 75) gehört die Tafel seit dem 19. Jahrhundert zur Grundausstattung eines jeden Klassenraums und verdankt ihren Status vor allem dem Wandel vom vortragenden zum fragend-entwickelnden Unterricht und der Neuorientierung des Lehrens hin zu einer Tätigkeit, die sich an eine alters- oder leistungshomogene Gruppe *als Ganzes* richtet.[2]

Eine Reihe von Studien hat den Gebrauch der Tafel in unterschiedlichen Unterrichtssituationen untersucht (Greiffenhagen 2000; Kalthoff

2 Bumstead (1841: viii) zitiert den Brief eines begeisterten Lehrers an das *Common School Journal:* »The inventor or introducer of the black-board system deserves to be ranked among the best contributors to learning and science, if

1997; 2011; Kalthoff/Röhl 2011; Pitsch 2007a; 2007b; Roth 1994; Schmitt 2001). Besonders wichtig ist Warwicks pädagogisch-historische Studie des Mathematikstudiums in Cambridge, in der Warwick den Weg der Tafel hinein in den höheren Mathematikunterricht beschreibt, der bis ins frühe 19. Jahrhundert größtenteils mündlich stattfand. In dieser Zeit wurde es unter Mathematikstudenten üblich, den Vorlesungen fernzubleiben und sich stattdessen Mentoren zu suchen. Nach Warwick arbeiteten diese zunächst mit nur einem bis zwei Studenten und einem Blatt Papier – erst die Tafel ermöglichte es ihnen, zu einer größeren Anzahl gleichzeitig zu sprechen.

> The primary method of teaching […] was the one-hour lecture to a class of not more than ten pupils using blackboard and chalk. The blackboard was a fairly recent pedagogical innovation in Cambridge at this time, private tutors having previously worked on paper with their pupils sitting next to them. The new generation of coaches used the blackboards as a means of displaying the art of mathematical work on paper in a form that was readily visible to a relatively large class of students. (Warwick 2003: 234)

Heutzutage ist der Vortrag von der Tafel aus diejenige Lehrmethode, mit der Mathematikstudenten am häufigsten in Berührung kommen. Anders als in anderen Fächern (und anders auch als in mathematischen *Forschungs*vorträgen) kommen moderne Mittel wie Overheadprojektoren oder Beamer in Mathematikvorlesungen kaum zum Einsatz – wenngleich sich in jüngster Zeit viele Universitäten bemühen, die Lehre durch Einführung von Whiteboards oder Beamern zu modernisieren. Als Gründe werden gemeinhin die altertümliche Anmutung der Kreidetafel, die Schädigung moderner Geräte (und der Lungen) durch Kreidestaub und die Möglichkeit eines interaktiveren Unterrichts angeführt, der es dem Dozenten erlaubt, sich seinen Zuhören zuzuwenden. Diese Modernisierung scheint vor allem in der Mathematik (und theoretischen Physik) auf Widerstand zu stoßen.

not among the greatest benefactors of mankind«. Ein Katalog für Schulbedarf aus dem Jahre 1881 preist die Vorteile der Tafel folgendermaßen an: »No one article of apparatus for the school-room is more indispensable than the blackboard. It is the public bulletin-board. It is the tablet for recording mental processes of the pupils. It is the mile stone indicating the rate of progress. It is the mirror reflecting the workings, character and quality of the individual mind. It is the chief auxiliary of the teacher; the aid-de-amp, the monitor, the guide« (Andrews & Co. 1881: 73).

IV. Ein Beweis an der Tafel

Im Folgenden werde ich einige Aspekte mathematischer Tafelarbeit anhand einer Vorlesung im Hauptstudium illustrieren. In dieser Sitzung entwickelt der Dozent einen Beweis für den Vollständigkeitssatz der Aussagenlogik. Der Satz wurde bereits in der vorigen Sitzung formuliert und wartet nun darauf, bewiesen zu werden – was fast vierzig Minuten in Anspruch nehmen wird.

Lemma 1.13

(i) $\Gamma \cup \{\theta\}$ consistent $\Longleftrightarrow \Gamma \nvdash \sim \theta$

(ii) Γ consistent $\Longrightarrow$ at least one of $\Gamma \cup \{\theta\}, \Gamma \cup \{\sim \theta\}$ consistent

(iii) if Γ_i are consistent and $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \ldots$, then $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ is consistent.

Abb. 1

Der Seminarraum verfügt über zwei Kreidetafeln. Zu bemerken ist, dass der Dozent vor Beginn der Sitzung eintrifft und, noch in Abwesenheit der meisten Teilnehmer, auf der rechten Seite der rechten Tafel ein ›Lemma‹ (ein Hilfssatz) notiert (Abb. 1). Interessant ist dieses Vorgehen aus mehreren Gründen:

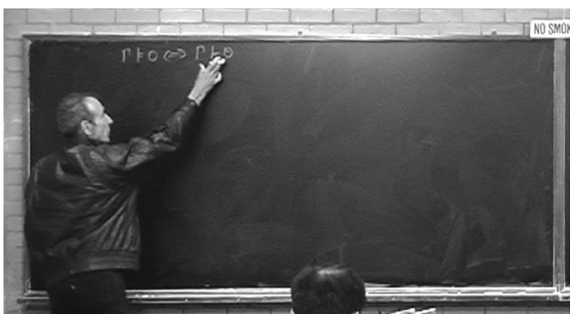
Erstens unterstreicht es die interne Verknüpftheit der Mathematik. Mathematische Beweisführung beruht zu einem guten Teil auf bereits Bewiesenem, sei es aus derselben oder aus einer anderen Vorlesung: »Die Mathematik«, heißt es bei Wittgenstein, »bildet ein *Netz* von Normen« (1984: VII, §67; meine Hervorhebung). Hier findet diese Verknüpftheit ihren materiellen Ausdruck: der Dozent notiert ein Ergebnis der letzten Sitzung an der Tafel.

Zweitens zeigt der Dozent seinem Publikum damit, dass er auf die Ergebnisse der letzten Sitzung im Laufe *dieser* Sitzung zurückgreifen wird. Das Lemma besteht aus drei Fällen, und die Studenten können davon ausgehen, dass alle diese Fälle zum Einsatz kommen werden. Diese Erwartung an den Tafelanschrieb wird nicht zuletzt auch durch seine Bezeichnung unterstützt: dass es sich um ein ›Lemma‹ (und nicht einen ›Satz‹) handelt, verdeutlicht den *Hilfs*charakter. Diese ›Hilfe‹ wurde zwar in der letzten Sitzung bewiesen, aber noch nicht ›benutzt‹. Zum jetzigen Zeitpunkt ist noch offen, *für was* es im Verlauf dieser Sitzung hilfreich sein soll.

Drittens ist zu beachten, dass das Lemma nicht an einer beliebigen Stelle, sondern am Rand einer der beiden Tafeln steht (siehe Abb. 4 unten). Dadurch wird es leicht auffindbar, wenn es gebraucht wird, ohne aber dem weiteren Anschrieb im Wege zu stehen. Diese Aufteilung hat durchaus Tradition: typischerweise sind es die linke und eben die rechte obere Ecke, die für bereits bekannte Definitionen oder Sätze verwendet werden.

Schließlich ist auch die Linie bedeutend, die der Dozent zum Schluss links des Lemmas zieht, um es vom restlichen, bislang leeren Rest der Tafel abzugrenzen. Derartige Linien und Kästen kommen vor allem dann zum Einsatz, wenn es darum geht, die Zusammengehörigkeit von Elementen zu markieren und sie zu einer ›Einheit‹ oder einem ›Schritt‹ zusammenzufassen (siehe unten).

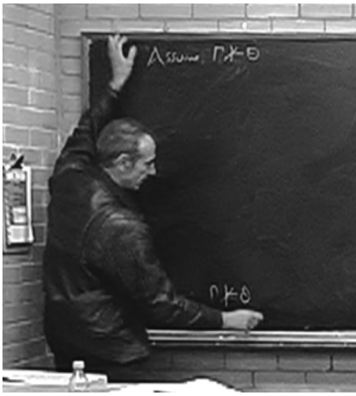
Nach Fertigstellung des Lemmas wartet der Dozent bis zum offiziellen Beginn der Vorlesung (Abb. 2): er blickt die Gruppe kurz an (Zeile 1), dreht sich aber bald zur Tafel und beginnt, während er redet, mit dem Schreiben (Zeile 3).



1 <u>Okay.</u> So I'm sure you'll remember where we're up to, cos you've probably been pretty
2 excited about it all. We're proving the completeness theorem for the sentential calculus.
3 So this is- ((starts writing)) >tells you that Gamma logically implies theta if and only if
4 there's a <u>proof</u> of theta ((finishes writing)) from Gamma. This side ((points at LHS))
5 talking about infinite number of things, possibly. This side ((points at RHS)) just talking
6 about <u>finite</u> little proof.

Abb. 2

Der Dozent eröffnet die Sitzung mit dem Hinweis, dass er dabei ist, einen bestimmten Satz zu beweisen – den Vollständigkeitssatz der Aussagenlogik, geschrieben als: $\Gamma \vDash \theta \iff \Gamma \vdash \theta$, was besagt, dass die linke Seite die rechte impliziert und umgekehrt. Der Dozent erklärt weiter, dass die eine der beiden Richtungen (von rechts nach links) keine Schwierigkeiten bereite und bereits in der letzten Sitzung geklärt worden sei. Noch offen sei hingegen die Gegenrichtung, die er mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises erarbeiten möchte: unter Annahme der Negation der rechten Seite will er zeigen, dass diese auch die Negation der linken Seite impliziert.



1 So. ((erases theorem))
2 ((starts writing at top))
3 What we've done here, is assumed.
4 It's not-, it's not possible to prove
5 theta from Gamma. And somewhere
6 at the bottom of the page.
7 ((starts writing at bottom))
8 We want to get down to showing:
9 Therefore Gamma does not logically
10 imply theta
11 ((finishes writing))

Abb. 3

Der Dozent wischt den Satz weg und setzt an seine Stelle, als erste Zeile des Beweises, die Annahme des Widerspruchsbeweises (Abb. 3). Nach Ende der ersten Zeile des Beweises fährt er jedoch nicht mit dem nächsten Schritt fort (Zeilen 3 bis 5), sondern notiert stattdessen das ›Ende‹ des Beweises, also das, was er zu zeigen vorhat, am unteren Rand der Tafel (Zeilen 8 bis 10). Dies ist aus zwei Gründen erwähnenswert:

Erstens erlaubt es dem Dozenten, visuell auszudrücken, dass das Beweisen eine *gerichtete Tätigkeit* ist. Mathematiker, die einen Beweis vorführen (oder zu finden versuchen), haben ein Ziel vor Augen. Hier platziert der Dozent dieses Ziel am Fuße der Tafel und signalisiert, dass der Beweis von ›oben‹ (Annahme) nach ›unten‹ (Schlussfolgerung) verlaufen soll, und zeichnet so gewissermaßen einen visuellen Entwurf des Beweises. Dieses Vorgehen ließ sich auch in anderen Vorlesungen beobachten (siehe auch Weber 2004: 121).

Zweitens spricht der Dozent vom »bottom of the page« und stellt damit eine Analogie her zwischen dem Schreiben auf der Tafel und dem Schreiben auf einer ›Seite‹. Hier wird deutlich, dass mathematische Beweise *geschriebene* Argumente sind und auch als solche behandelt werden. Dies deckt sich mit Warwicks Feststellung, dass die Mentoren vor Einführung der Tafel mit ein oder zwei Schülern um ein Blatt Papier saßen: die Tafel erlaubt es, dieses Arrangement im Hinblick auf eine größere Zuhörerschaft zu skalieren.

Die Ähnlichkeit zwischen dem Schreiben an der Tafel und dem Schreiben auf Papier (welches auch das Verfassen von Artikeln und Büchern umfasst) lässt sich durch weitere Fälle verdeutlichen. In einer anderen Sitzung *schrieb* – nicht bloß: sagte – der Dozent beispielsweise »as for T above«, und zeigte auf dieses T, welches aber räumlich nicht weiter oben, sondern weiter *rechts* auf der Tafel stand. Dies entspricht der (auch in diesem Beitrag befolgten) Konvention, nach welcher ein ›oben‹ auch ein zeitliches ›vorher‹ bezeichnen kann. Das »above« des Dozenten verweist somit weniger auf einen physischen Ort auf der Tafel, sondern auf einen Punkt in der zeitlichen Entfaltung der geschriebenen Beweisführung.

In einem weiteren Schritt des Beweises notiert der Dozent – als Folgerung aus der obigen Annahme –, dass die Menge $\Gamma \cup \{\sim\theta\}$ konsistent ist. Diese Folgerung platziert er neben der Annahme und verbindet beide durch das Symbol ›∴‹ für »folglich«. Unterhalb der Annahme zieht er eine Linie, die diese beiden Schritte zu einem Abschnitt in der Entwicklung des Arguments zusammenfasst. Mit einer zweiten, senkrechten Linie rechts davon teilt er die Tafel in zwei Spalten auf.

Bevor er mit dem Beweis fortfährt, macht der Dozent auf das Lemma auf der rechten Seite aufmerksam, das er vor Beginn der Sitzung angeschrieben, aber bislang noch nicht verwendet hat. Er geht von der linken zur rechten Tafel, zeigt auf das Lemma und erklärt, es sei ein »helper«, den er zum Entwickeln des Beweises benutzen könne (»plug into«):

```
And to help us ((walks to right board)) Uhm. We have a helper here ((points at
lemma)) in this lemma, one point thirtheen, which we gonna plug in.
```

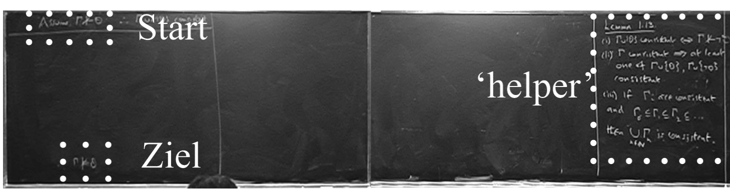


Abb. 4

Der Dozent hat den Studenten somit einen visuellen Entwurf der ›Architektur‹ des Beweises gegeben (Abb. 4).[3] Die linke obere Ecke enthält die Annahme (als Ausgangspunkt); die linke untere die angestrebte Schlussfolgerung (als Ziel); am rechten Rand der Tafel steht das Lemma als

3 Wie sich das Verhältnis vom Entwurf eines Beweises zu seinen einzelnen Schritten vorstellen lässt, erläutert die anschauliche Beschreibung Polanyis (1958: 119, Herv. C.G.): »To look at a mathematical proof by merely verifying each consecutive step – says Poincaré – is like watching a game of chess, noting only that each step obeys the rules of chess. The least that is required is a grasp of the logical sequence as a purposeful procedure: what Poincaré describes as 'the something which constitutes the unity of the demonstration'. It is this 'something' – *perhaps in the form of an outline embodying the main steps in the proof* – for which the student will grope, if baffled by a sequence of operations which convey no sense to him, and it is again this outline, embodying the general principle or general structure of the mathematical proof, which will be remembered when the details of the proof are forgotten«.

Werkzeug für den Weg von der Annahme zur Schlussfolgerung. Dieses Arrangement hat auch den verbleibenden *unbeschriebenen* Raum maßgeblich geprägt: dieser ist jetzt nicht mehr einfach leer, sondern wartet darauf, gefüllt zu werden – mit eben jenen Schritten zwischen Anfang und Ende.

Nachdem der Dozent die grobe Struktur des Beweises erläutert hat, kann er mit dem eigentlichen Beweis fortfahren.

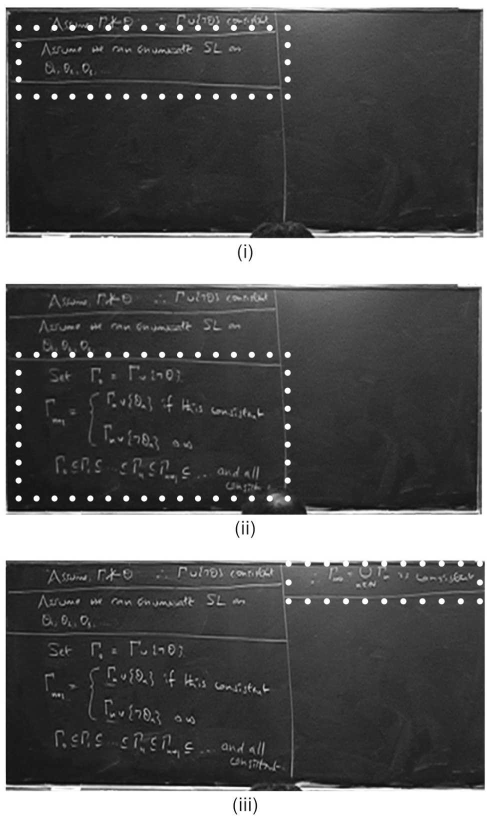


Abb. 5

Abbildung 5 zeigt die nächsten drei Schritte, die er an die Tafel schreibt. In diesen drei Schritten:

(i) führt der Dozent eine Annahme ein (dabei erwähnt er, dass der Anhang des Vorlesungsskripts eine Version des Beweises enthält, die ohne diese Annahme auskommt);

(ii) definiert er eine Folge von Mengen und zeigt zwei Eigenschaften dieser Folge: dass es sich um eine steigende Folge handelt, und dass jede Menge in dieser Folge konsistent ist;

(iii) definiert er eine neue Menge Γ_∞ und beweist, dass diese ebenfalls konsistent ist.

Im Rahmen dieses Beitrags ist hieran vor allem die Frage interessant, wie jeder dieser Schritte *als Schritt* markiert wird – nämlich unter Zuhilfenahme von Linien, die zusammen eine Anzahl von ›Kästen‹ ergeben. Diese Kästen machen deutlich, welche Sätze und Symbole ›zusammengehören‹. Die linke Tafel besteht mittlerweile aus vier solcher Kästen; jeder von ihnen stellt einen größeren Sinnabschnitt in der Entwicklung des Beweises dar.

Linien und Kästen gehören zum Standardrepertoire mathematischer Kommunikation (vgl. z.B. Livingston 1986: 49; Nemirovsky/Smith 2001). Sie sind Teil dessen, was Coleman (1988; 1990) als ›Paragraphy‹ bezeichnet. Sie betonen, dass der Beweis nicht eine lineare Abfolge homogener Schritte ist, sondern aus einer Anzahl von ›Brocken‹ besteht, die in Form und Größe sehr unterschiedlich ausfallen können.

In seinem Beweis der beiden Eigenschaften dieser Folge von Mengen verweist der Dozent mehrfach auf das Lemma. Meist *zeigt* er dazu kurz darauf; in zwei Fällen *geht* er tatsächlich zur rechten Tafel. So auch, als er beweist, dass die Menge Γ_∞ konsistent ist, bevor er daraufhin noch einmal zusammenfasst, wie die verschiedenen Teile des Lemmas in den Beweis eingegangen sind:

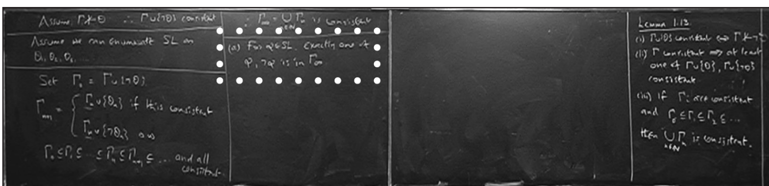
```
And therefore ((starts writing)) Gamma infinity, which will be defined as the
union of all these Gamma ns, is consistent. ((finishes writing)) And that’s by:
((walks to right board)) ((points at lemma) this part here, part three. So we’ve
used all these bits straightaway, isn’t that nice? We’ve brought this toolbox and
now we’ve used all of the tools right in the first-, huh, in the first half page
of the proof. That’s good.
```

Der Dozent betont, *dass* das Lemma für den Beweis benutzt wurde, und dass es *vollständig* benutzt wurde. Dies unterstreicht, dass wir es hier mit einem *organisierten* Wissenskorpus zu tun haben. Als die Studenten in der vorigen Sitzung mit dem Lemma erstmalig in Kontakt kamen, dürfte ihnen noch nicht klar gewesen sein, *warum* die Aussagen dieses Hilfssatzes eines Beweises bedurften. Es gab aber die Erwartungshaltung, dass sie als Hilfsmittel für den Beweis des nächsten Satzes zum Einsatz kommen würden. Somit ist dieser mathematische Wissenskorpus nicht nur organisiert; er ist auch *effizient* organisiert, sodass weder mehr noch weniger bewiesen wird als nötig. Die Bemerkung des Dozenten – »we’ve used all of the tools […] in the first half page of the proof« – lässt ein

Streben nach einer durchdachten und effizienten Anordnung des Wissenskorpus erkennen.

Bemerkenswert ist zudem, dass der Dozent einmal mehr die Tafel wie ein Blatt Papier behandelt (»the first half page«) und damit den *geschriebenen* Charakter der von ihm behandelten Beweise betont – wobei die Rede von der »halben Seite« nicht bloß den beschriebenen Platz bezeichnet, sondern vielmehr auch dessen Rolle als zusammenhängender Sinnabschnitt des Beweises.

Im nächsten Schritt behandelt der Dozent die zwei für ihn wesentlichen Eigenschaften der soeben definierten Menge Γ_∞. Zunächst notiert er die erste der beiden Eigenschaften (Abb. 6). Diese Eigenschaft wird nun sogleich bewiesen (Abb. 7, s. nächste Seite), wobei der Dozent erstmalig seit Beginn der Sitzung auch die rechte Tafel benutzt.



So first of all we're gonna derive a couple of-, uh, very very useful, in fact, really the useful properties of Gamma infinity. So the first one is ((starts writing)) a:, for phi a sentence of L, exactly one of phi and not phi is in Gamma infinity. ((finishes writing)) So for every sentence ((walks away from board)) either it or its negation gets in, and they don't both get in. So exactly one of those two get in.

Abb. 6

Der Dozent

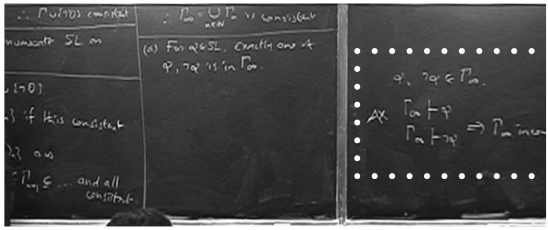
(i) zeigt auf der linken Seite der rechten Tafel, dass nicht sowohl φ als auch $\sim\varphi$ in Γ_∞ enthalten sein können;

(ii) beweist auf der linken Tafel unterhalb der zu beweisenden Eigenschaft, dass aber wenigstens eines der beiden in Γ_∞ enthalten sein muss;

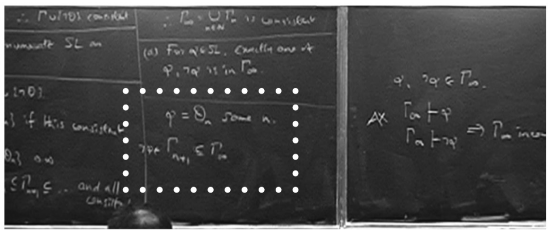
(iii) und wischt gleich darauf beide Teile dieses Beweises wieder weg.

Entscheidend sind hier zwei Gesichtspunkte: Erstens folgt der Dozent dem Rat Gillmans (1987: 6): »state first, prove second«, indem er *zuerst* eine Aussage, die er beweisen möchte, anschreibt, und *dann* ihren Beweis nachliefert, wahlweise rein mündlich oder an der Tafel.[4] Dies gilt

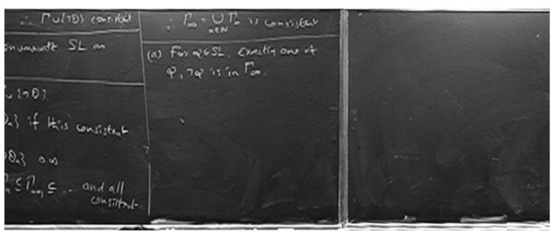
4 Gillman (1987: 6) dazu: »*State first, prove second*. Keep in mind that you have to maintain the reader's interest at all times. An easy way to lose it is by stringing along a succession of statement with no discernible goal – the classic



(i)



(ii)



(iii)

Abb. 7

sowohl für den Satz, der die Sitzung einleitete und gerade bewiesen wird, als auch für einzelne Behauptungen *innerhalb* dieses Beweises. Nachdem er beispielsweise die Menge Γ_∞ definiert hat, behauptete er *zuerst* deren Konsistenz und zeigte *dann,* warum dies so ist. Hier schreibt er die Eigenschaft von Γ_∞ an, bevor er den Beweis schreibt und spricht. Zweitens ist von Bedeutung, *wie* der Beweis der Eigenschaft (a) geschrieben wird. Während die bisherige Tafelarbeit eher auf effiziente Raumnutzung ausgerichtet schien, wirkt dieser Beweis mit seiner großen, losen Schrift in der Mitte der rechten Tafel eher verschwenderisch. Auch folgt er nicht der räumlich linearen Entwicklung des ›Hauptbeweises‹, die sich ausschließlich auf der linken Tafel in zwei schrittweise gefüllten Spalten

example being a sequence of arguments culminating in the triumphant cry: ›We have proved the following theorem.‹ *Always state the theorem before proving it*«.

vollzog. Stattdessen findet sich der erste Teil dieses ›Nebenbeweises‹ im Wortsinne *neben* dem Hauptbeweis, als eine Art Randbemerkung auf der rechten Tafel (Abb. 7.i). Dies wird noch dadurch unterstrichen, dass auch der zweite Teil des Nebenbeweises aus der ansonsten linear verlaufenden Raumnutzung herausfällt (Abb. 7.ii).

Nach dem ›sprechenden Schreiben‹ des Beweises der Eigenschaft (a) entfernt der Dozent beide Teile dieses Nebenbeweises ohne jeden Kommentar (Abb. 7.iii). Gegen die didaktischen Konventionen verwehrt er damit den Studenten die Möglichkeit, das eben Angeschriebene zu notieren oder wenigstens auf sich wirken zu lassen.[5] Typischerweise würde der Dozent so etwas wie »Right. Let's go over ((looks around)) <u>here</u>, perhaps, because I don't want to rub it off immediately« sagen, oder sich mindestens zur Entschuldigung verpflichtet fühlen: »Sorry to wipe that straight off, that's bad form«. In diesem Falle jedoch entfernt der Dozent den gesamten Nebenbeweis *ohne* weitere Bemerkungen, wohl aus der Überzeugung, den Studenten sei bewusst, dass es sich hierbei nur um eine Randbemerkung handelt.

Für die zweite Eigenschaft der Menge verfährt der Dozent analog. Die Eigenschaft selbst platziert er auf der linken Tafel; ihren Beweis auf der rechten. Obwohl es sich dabei nur um einen einzelnen Schritt handelt, ›verschwendet‹ auch dieser Nebenbeweis viel Platz auf der rechten Tafel, zumal im Kontrast zum engen Tafelbild des Hauptbeweises auf der linken Seite. Wie beim Beweis der ersten Eigenschaft entfernt er auch hier wieder das eben Geschriebene von der rechten Tafel ohne weiteren Kommentar.

Der Dozent hat somit die Tafel in drei Bereiche eingeteilt: (1) die rechte Seite der rechten Tafel, reserviert für das Ergebnis der vorigen Sitzung; (2) die linke Tafel für die Schritte des zu entwickelnden Beweises; (3) die linke Seite der rechten Tafel als ›Kladde‹ für Nebenbeweise der Behauptungen des Hauptbeweises (auf der linken Tafel).

5 Bei Krantz (1999: 41) findet sich folgender Ratschlag: »In particular, you should not lecture by writing a few words, erasing those, and then writing some more words on top of the erased words. Students cannot follow such a presentation. I cannot emphasize this point too strongly: Write from left to right and from top to bottom. *Do not erase.* When the first box is filled, proceed to the second. *Do not erase.* Only when all blackboards are full should you go back and begin erasing. Students must be given time to stare at what they've just seen as well as what is currently being written. Keep as much material as possible visible at all times«.

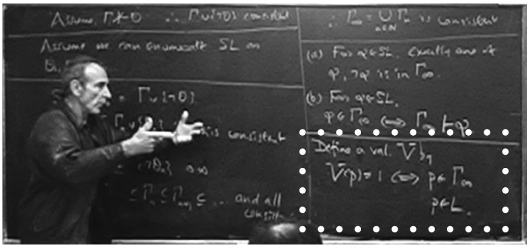
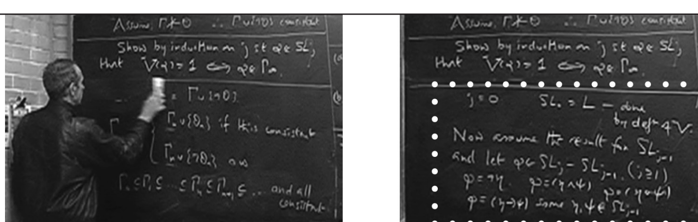


Abb. 8

Im nächsten Schritt fährt der Dozent mit dem Hauptbeweis fort und definiert eine Belegung V durch $V(p) = 1 \Leftrightarrow p \in \Gamma_\infty$ for $p \in$. (Abb. 8). Mit diesem Schritt ist die linke Tafel komplett gefüllt. Wo soll es weitergehen? Platz wäre noch auf der rechten Tafel, doch diese ist eigentlich der Kladde vorbehalten. Bleibt die Möglichkeit, etwas Platz auf der linken Seite zu schaffen. Der Dozent könnte zum Beispiel nach dem Prinzip ›first in, first out‹ den Inhalt der linken obere Ecke wegwischen und dort weiterschreiben. Genau dies tut er auch in manchen Sitzungen. Hier jedoch möchte er scheinbar den Ausgangspunkt der Argumentation während eines solch langen Beweises sichtbar halten – und leert stattdessen den zweiten Kasten.

Der Dozent braucht einige Zeit, um eine geeignete Stelle zu finden. Am Ende beschließt er, dass er die Annahme im zweiten Kasten für seine Argumentation nicht mehr benötigt. Dieses Absuchen der Tafel nach nicht mehr benötigten Stellen konnte ich in den Vorlesungen immer wieder beobachten. In den nunmehr freien Kasten trägt der Dozent den nächsten Schritt des Hauptbeweises ein, in welchem er mit einem induktiven Argument zeigen will, dass $V(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma_\infty$. Nach zwei Zeilen aber steht er erneut vor Platzproblemen.

Er leert den großen Kasten direkt darunter (Abb. 9), dessen Inhalt er ebenfalls nicht mehr zu benötigen scheint, und füllt ihn mit dem Beginn



1 A::nd ((looks)) Yeah I don't think I need this anymore.
2 ((starts erasing)) So I'll wrap this off, otherwise it will distract you. ((finishes erasing))
3 ((draws the line again))
4 [...]
5 ((writes-talks the next step))

Abb. 9

des induktiven Beweises. Dieser besteht aus dem sog. Induktionsanfang (von dem der Dozent anmerkt, dass er aus der Definition von V folge), und einer Reihe von Induktionsschritten. In diesem Fall gibt es vier solcher Schritte, die der Dozent notiert.

Während jedoch die Nebenbeweise der zwei Eigenschaften von Γ_∞ (Abb. 7) kommentarlos weggewischt wurden, gibt der Dozent in diesen beiden Fällen eine Erklärung: »we don't need this assumption anymore« und »I don't think I need this anymore« (Abb. 9). Er bemerkt an, dass er sich in der weiteren Entwicklung des Beweises nicht mehr auf diese Elemente beziehen muss. Randbemerkungen oder Nebenbeweise lassen sich ohne langes Nachdenken entfernen – geht es jedoch um Teile des Hauptbeweises, scheint er zu zögern. Sie sind entbehrlich, aber nur dann, wenn sie ihren Dienst getan haben, also keine Rolle mehr im weiteren Verlauf des Beweises spielen. Eine solche Ausmusterung von ›Altlasten‹ ist freilich nicht zu jedem Zeitpunkt möglich. Dort, wo es jedoch möglich ist, wird deutlich, dass das Löschen von Teilen des Tafelanschriebs immer eine *vorausschauende Analyse* des erst noch zu vollendenden Beweises ist.[6]

Der Dozent fährt mit den Beweisen aller vier Fälle der Induktion fort. Auch diese sind in gewisser Weise ›Randbemerkungen‹, weshalb er sie wieder auf die rechte Tafel schreibt. Abbildung 10 zeigt den Beweis des ersten Falles. Das Beweisen der vier Fälle nimmt insgesamt zwanzig Minuten in Anspruch und geschieht ausschließlich auf der rechten Tafel. Somit steht nur wenig Platz zur Verfügung, weshalb der Dozent immer wieder wegwischen muss, was er gerade geschrieben hat.

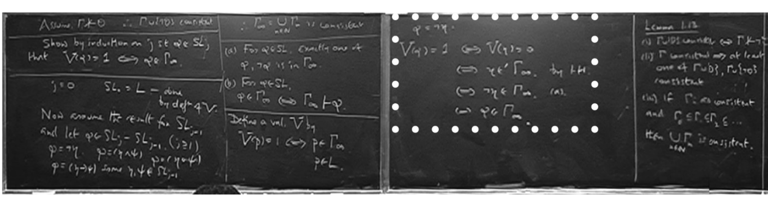
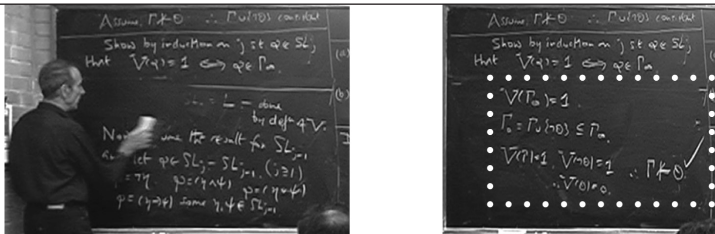


Abb. 10

Nach Beendigung des vierten und letzten Falles kehrt er an die linke Tafel zurück und zeigt auf die Aussage $V(\varphi) = 1 \ \Leftrightarrow \ \varphi \in \Gamma_\infty$, die er mit den vier induktiven Fällen bewiesen hat. Ein zweites Mal leert er den Kasten unterhalb dieser Aussage und beschreibt ihn von neuem – diesmal mit den letzten Schritten des Hauptbeweises – und schließt ab mit

6 Im weiteren Verlauf des Beweises benötigt der Dozent mehr Platz auf der rechten Tafel und überlegt, das Lemma auf der rechten Seite wegzuwischen (»maybe I don't need <u>that</u> anymore«). Letztendlich lässt er zumindest den ersten Fall des Lemmas jedoch stehen: »I think I need that bit«.



1 Right. Well now we're done, right? We've proved ((points to second box)) this result. We've
2 proved it by induction ((starts erasing)) We've now got it for all sentences.
3 ((finishes erasing))
4 [...]
5 ((writes-talks the next step))
6 [...]
7 Here's a valuation ((points)), the one we made here, which gives everything in Gamma value
8 one and gives theta value zero. We're done ((writes 'big tick')) yes (.) big tick ((walks away))

Abb. 11

einem zufriedenen »we're done«, verkörpert durch einen großen Haken auf der Tafel (Abb. 11, Zeile 8).

V. Diskussion

Zu den Zielen dieses Beitrags gehörte es, die materiellen Seiten der Mathematik herauszuarbeiten und dabei vor allem zu zeigen, dass Mathematik ›tun‹ und Mathematik ›lernen‹ untrennbar mit lesenden und schreibenden Tätigkeiten verknüpft sind. Dieser Zusammenhang zeigt sich besonders deutlich in der Vorführung von Mathematik an der Tafel in Vorlesungen. Wem solche Vorlesungen fremd sind, der wird von der schieren *Menge* des Schreibens in solchen Vorlesungen überrascht sein. Es nicht unüblich, dass ein Dozent innerhalb einer Dreiviertelstunde mehrere Tafeln füllt. Bemerkenswert ist jedoch nicht nur das Ausmaß, sondern auch die eigentümliche Form des Geschriebenen. Was ein Mathematikdozent an die Tafel schreibt, ist in gewisser Weise ›vollständig‹: würde man die Tafel zu bestimmten Zeitpunkten in der Vorlesung fotografieren, könnte ein ausreichend kundiger Leser allein auf Grundlage dieser Fotos die mathematische Argumentation nachvollziehen, weshalb Krantz hieraus eine Empfehlung für die mathematische Tafelarbeit ableitet: »After you have filled a board, it should be neat enough and clear enough that you could snap a Polaroid snapshot and read the presentation from the Polaroid« (1999: 41).

Bemerkenswert ist, dass diese Mathematikvorlesung, wie viele andere, von einem Skript begleitet wird, das zu Beginn des Semesters verteilt wurde und fast alle Sätze *und* Beweise enthält, die im Verlauf des Semesters an die Tafel geschrieben werden.[7] Was den reinen Informationsgehalt angeht, besteht damit für den Dozenten gar keine Notwendigkeit, die Beweise auch an der Tafel durchzuexerzieren. Welchen Zweck hat dann eine Mathematikvorlesung? In den Worten des Mathematikers Rota:

> It may be asked why anyone would bother to sit in a lecture which was the literal repetition of an available text. Such a question would betray an oversimplified view of what goes on in a classroom. What one really learns in class is what one does not know at the time one is learning. The person learning to us was logic incarnate. His pauses, hesitations, emphases, his betrayals of emotions (however rare) and sundry other nonverbal phenomena taught us a lot more logic than any written text. We learned to think in unison with him as he spoke, as if following the demonstration of a calisthenics instructor. (Rota 1997: 5–6)

Das Entscheidende an solchen Vorlesungen ist also, mit Ryles Begriffen, weniger das knowledge-*that* als vielmehr das knowledge-*how*. Es geht nicht so sehr um den Beweis als *Produkt*, sondern um das Beweisen als *Prozess*.[8] Mathematikvorlesungen sollen mathematisches Denken so vermitteln, dass die Studenten, ergänzt durch ihre eigenständige Arbeit, langsam aber sicher die zugrundeliegenden Prinzipien verinnerlichen. Möglicherweise ist dies der Hauptgrund, weshalb Dozenten ihre Sätze und Beweise lieber *ausschreiben* als sie vorgefertigt an die Wand zu werfen. Beim Mathematiker Halmos heißt es: »the blackboard […] provides the opportunity to make something grow and come alive in a way that is not possible with the printed page. (Lecturers who prepare a blackboard, cramming it full before they start speaking, are unwise and unkind to audiences)« (1970: 149).

Ich habe einige Praktiken aufgezeigt, mit denen Dozenten an der Tafel die Strukturen mathematischen Denkens hervorheben können. Die vielleicht einfachste dieser Praktiken ist das Zeichnen von Kästen und

7 Krantz (1999: 50) merkt hierzu an: »At many universities, it is common to distribute prepared lecture notes. […] This can be a real boon to the students. First, many a student is unable to take good notes and listen to the lecture (and think!) at the same time. Knowing that good notes are available for a modest price gives such a student the freedom to sit back and really listen. Second, having prepared notes available makes missing class a less onerous inconvenience than it would be otherwise«.

8 So auch Lucas (2000: 366–367): »Mathematical knowledge is very largely knowledge how to do things, rather than knowledge that such and such is the case. We learn how to do long division, solve quadratic equations and differential equations, how to do vectors and tensors and Fourier analysis. […] Once we see the mathematician as an active operator who does things he knows how to do rather than a passive percipient of eternal truths, mathematical knowledge appears much less puzzling«.

Linien, die Elemente an der Tafel in größere, leicht auffindbare Gruppen zusammenfassen. Es wäre voreilig, solche Werkzeuge als trivial abzutun, denn dasselbe Tafelbild *ohne* sie wäre wesentlich schwieriger zu verstehen:

> It is easy to dismiss Paragraphy as making no essential contribution to the text because it is by definition not part of the 'real' content. But [...] Paragraphy can make the difference between a communication which is understood and one which is not; there can hardly be a greater contribution.« (Coleman 1988: 247)

Beweise lassen sich in Untereinheiten zerlegen; Linien und Kästen verdeutlichen den Zusammenhalt und die (teilweise) Eigenständigkeit solcher Untereinheiten. Wir können uns Beweise somit als eine Reihe von Stufen auf einer Leiter vorstellen – woraus eine Stufe besteht, zeigt der Dozent mit Hilfe von Linien und Kästen.

Der Dozent kann ebenso *spezielle Bereiche* der Tafel für bestimmte Zwecke reservieren. Im Falle dieses Beweises war die rechte Seite der rechten Tafel einem wichtigen Ergebnis der letzten Sitzung vorbehalten; die linke Tafel gehörte den Hauptschritten des Beweises; der verbleibende Platz auf der rechten Tafel hingegen wurde als Kladde benutzt. Krantz fasst dieses Vorgehen als Empfehlung für die mathematische Tafelarbeit zusammen: »Try to think ahead. Material that needs to be kept – and not erased – should be written (probably in a box) on a blackboard to the far left or far right where it is out of the way but can be referred to easily. You may wish to reserve another box on the blackboard for asides or remarks« (1999: 40).

Dass es sich um eine Randbemerkung handelt, zeigen Dozenten vor allem über deren Platzierung (zum Beispiel ganz am Rand oder mit einiger Platzverschwendung in der Mitte einer leeren Tafel) und die Schreibweise (überdurchschnittlich große oder kleine Buchstaben und Buchstabenabstände). So wird deutlich, dass diese Bemerkungen nicht Teil des Hauptbeweises sind (welcher dicht, aber lesbar und wohlgeordnet geschrieben wird) und daher jeden Moment wieder verschwinden können.

Dozenten können mit Hilfe der Tafel auch die grobe ›Architektur‹ des Beweises vorab skizzieren (Abb. 4). In unserem Beispiel schrieb der Dozent seine Annahme an den Kopf und das Ziel des Beweises an den Fuß der Tafel und verdeutlichte damit, dass es sich beim Beweisen um eine gerichtete Tätigkeit, nicht um eine beliebige Folge logisch verknüpfter Schritte handelte.

Zu guter Letzt können Dozenten die Schrift auf der Tafel wie Schrift auf dem Papier behandeln – mit dem Unterschied, dass der Tafelanschrieb auch für eine große Gruppe gut sichtbar ist. Das Schreiben auf dem Papier und das Schreiben auf der Tafel sind zwei (fast) gleiche Arten der Darbietung desselben Beweises. Die Papiervariante kann den Studenten ausgehändigt und von jedem einzeln gelesen werden. Beim Vorführen eines Beweises kann ein Dozent mittels mündlicher Bemerkungen und Zeigens mit dem Körper, seinem Publikum die Möglichkeit geben, den Übergang von einem Schritt zum nächsten nachzuvollziehen.

Die Tafel scheint einige Eigenschaften zu haben, die sie zu einem besonderen didaktisches Medium der Mathematik machen. Dies bestätigt der informelle Austausch mit etwa einem Dutzend Mathematikern, die ich meist per Email kontaktierte: Ohne Ausnahme ziehen die Befragten die Tafel der Beamerpräsentation vor, wenn es um Vorlesungen und akademische Vorträge geht. Zu beobachten war zudem eine Vorliebe für die Kreidetafel gegenüber dem Whiteboard. Auch enthielten die Rückmeldungen Berichte von Streitigkeiten mit Universitätsverwaltungen, die Mathematiker zunehmend ›ihrer‹ Kreidetafeln berauben und sie stattdessen mit Whiteboards oder, »schlimmer noch«, Computertechnik ausstatten. Die Vorliebe für die Kreidetafel wurde vor allem über folgende Faktoren begründet:[9]

Geschwindigkeit: einen Beweis auf der Tafel auszuschreiben, drosselt das Tempo der Vorlesung und macht es der Zuhörerschaft leichter, dieser zu folgen. »The blackboard slows you down«, formuliert es ein Mathematiker in einer Email, »Lecturers have a tendency to be too fast in math, and if you have everything prepared on the slides, it is too easy to be too quick and lose the audience«.

Sichtbarkeit: Zu den Vorteilen der Kreidetafel gegenüber dem Whiteboard gehört die bessere Sichtbarkeit der Schrift auch aus größerer Entfernung, was dem Verhältnis von Vordergrund- zu Hintergrundfarbe zugeschrieben wird. In den Worten eines anderen Mathematikers: »Blackboards are also much more visible from a distance (because the human eye can read white characters on dark background much better than the other way round… highway sign designers seem to have understood this phenomenon, but not university managers)«.

Lesbarkeit: Einige Mathematiker merkten an, dass Dozenten – anders als an der Kreidetafel – mit dem Whiteboard und den dazugehörigen Stiften zu einer kleinen und undeutlichen Handschrift neigen: »One also tends to write too small with dry markers and the audience cannot read it. In my experience, most presenters do have a horrible handwriting on white boards. Bad writing can be a problem on blackboards too but the chalk does not allow too fast and sloppy writing so that most blackboards are clearer than whiteboards«.

Platz: Aufgrund ihrer Größe erlauben es Kreidetafeln dem Dozenten, viel ›Text‹ gleichzeitig sichtbar zu halten, anstatt in schneller Folge immer wieder Teile wegzuwischen: »Blackboards are best for maths (in my

9 Siehe auch die Kommentare im Internetforum *MathOverflow* zu der Frage »what's so great about blackboards?«, http://mathoverflow.net/questions/5936.

opinion) because of the amount of writing that goes on, the need to leave stuff up and then pull bits together«. Dieser Gesichtspunkt ist von entscheidender Bedeutung und dürfte erklären, warum viele Hörsäle über eine größere Anzahl von Tafeln verfügen. Wer viel Platz hat, kann leicht auf länger zurückliegende Ergebnisse verweisen (was auch heißt: körperlich auf sie zeigen) und betont damit den retrospektiv-prospektiven Charakter der Mathematik.

Didaktik: Viele Mathematiker merkten an, dass der Zwang zum *Ausschreiben* des Beweises (im Gegensatz zum bloßen Zeigen auf der Leinwand) den *Prozess* mathematischen Denkens sichtbar mache: »In math, we are not just teaching facts, but a way of doing things. Presenting this as a sequence of (well-prepared) computer slides will not give them the right impression of how mathematics develops, and thus miss one of the crucial points of why we still have lectures«.

Kommentare wie diese lassen die starke Bindung erkennen, die Mathematiker zur Kreidetafel als Kommunikationsmittel zwischen Dozent und Studenten pflegen. An anderen Stellen wird allerdings auch deutlich, dass Mathematiker die Tafel nicht nur für Zwecke der Lehre schätzen. Sie benutzen sie ebenso für ihre eigene kreative Arbeit – individuell oder in der Gruppe –, was das Hauptmotiv dieses Beitrags untermauert und verstärkt: die Verbindung zwischen mathematischem Denken und Schreiben.

aus dem Englischen von Nils Lindenhayn

Literatur

Andrews & Co, 1881: A. H. Andrews & Co's Illustrated Catalogue of School Merchandise. Chicago: A. H. Andrews & Co., Manufacturers.

Bumstead. J. F., 1841: The Black Board in the Primary School: A Manual for Teachers. Boston: Perkins & Marvin.

Coleman, E., 1988: The Role of Notation in Mathematics. Diss. Phil., Department of Philosophy, University of Adelaide.

Coleman, E., 1990: Paragraphy. Information Design Journal 6 (2) : 131–146.

Coleman, E., 1994: Presenting mathematical information. In R. Penman und D. Sless (Hg.): Designing Information For People, Canberra: Communication Research Press, S. 41–62.

Gillman, L., 1987: Writing Mathematics Well: A Manual for Authors. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Goody, J., 1977: The Domestication of the Savage Mind. Cambridge: Cambridge University Press.

Greiffenhagen, C., 2000: From traditional blackboards to interactive whiteboards: a pilot study to inform system design. Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics

Education (PME–24, Hiroshima, Japan, 23.–27. Juli 2000), Bd. 2, S. 305v313.
Halmos, P. R., 1970: How to write mathematics. L'Enseignement Mathématique 16: 123–152.
Halmos, P. R., 1985: I Want To Be A Mathematician: An Automathography. New York: Springer.
Hamilton, D., 1990: Learning about Education: An Unfinished Curriculum. Milton Keynes: Open University Press.
Heintz, B., 2000: Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin. Wien: Springer.
Higham, N. J., 1998: Handbook of Writing for the Mathematical Sciences. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics.
Kalthoff, H., 1997: Wohlerzogenheit. Eine Ethnographie deutscher Internatsschulen. Frankfurt/Main: Campus.
Kalthoff, H., 2011: Social Studies of Teaching and Education. Skizze einer sozio-materiellen Bildungsforschung. In D. Šuber, H. Schäfer, S. Prinz (Hg.): Pierre Bourdieu und die Kulturwissenschaften. Zur Aktualität eines undisziplinierten Denkens. Konstanz: UVK, S. 107–133..
Kalthoff, H. / Röhl, T., 2011: Interobjectivity and interactivity: material objects and discourse in class. Human Studies 34(4), 451–469.
Knuth, D. E. / Larrabee, T. / Roberts, P.M., 1989: Mathematical Writing. Washington, DC: Mathematical Association of America.
Krantz, S. G., 1997: A Primer of Mathematical Writing. Providence, RI: American Mathematical Society.
Krantz, S. G., 1999: How to Teach Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society.
Latour, B., 1986: Visualization and cognition: thinking with eyes and hands. Knowledge and Society 6: 1–40.
Latour, B., 2008: The Netz-works of Greek deductions. Social Studies of Science 38(3): 441–459.
Livingston, E., 1986: The Ethnomethodological Foundations of Mathematics. London: Routledge.
Lucas, J. R., 2000: The Conceptual Roots of Mathematics: An Essay on the Philosophy of Mathematics. London: Routledge.
Luria, A. R., 1976: Cognitive Developments: Its Cultural and Social Foundations. Cambridge, MA: Harvard University Press.
Merz, M. / Knorr Cetina, K., 1997: Deconstruction in a 'thinking' science: theoretical physicists at work. Social Studies of Science 27(1): 73–111.
Nemirovsky, R. und Smith, M., 2011: The physicality of symbol-use. In S. Brown / S. Larsen / K. K. Marrongelle / M. Oehrtman (Hg.): 14th Annual Conference Research in Undergraduate Mathematics Education (24.–27. Februar 2011, Portland, Oregon).
Netz, R., 1999: The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History. Cambridge: Cambridge University Press.
Ochs, E. / Gonzalez, P. / Jacoby, S., 1996: 'When I come down I'm in the domain state': grammar and graphic representation in the interpretive

activity of physicists. In: E. Ochs / E. A. Schegloff / S. A. Thompson (Hg.): Interaction and Grammar. Cambridge: Cambridge University Press, S. 328–369.

Ochs, E. / Jacoby, S. / Gonzalez, P., 1994: Interpretive journeys: how physicists talk and travel through graphic space. Configurations 2(1): 151–171.

O'Halloran, K. L., 1999: Towards a systemic functional analysis of multisemiotic mathematical texts. Semiotica 124(1/2): 1v29.

O'Halloran, K. L., 2005: Mathematical Discourse: Language, Symbolism and Visual Images. London: Continuum.

Ong, W. J., 1982: Orality and Literacy: The Technologizing of the Word. London: Methuen.

Pitsch, K., 2007a: Unterrichtskommunikation revisited: Tafelskizzen als interaktionale Ressource. Bulletin Suisse de Linguistique Appliquée 85, S. 59–80.

Pitsch, K., 2007b: Koordinierung paralleler Aktivitäten. Zum Anfertigen von Mitschriften im Schulunterricht. In R. Schmitt (Hg.): Koordination. Analysen zur multimodalen Interaktion, S. 411–446. Tübingen: Narr.

Polanyi, M., 1958: Personal Knowledge: Towards a Post-Critical Philosophy. London: Routledge & Kegan Paul.

Rosental, C., 2003: Certifying knowledge: the sociology of a logical theory in artificial intelligence. American Sociological Review 68 (4), S. 623–644.

Rosental, C., 2008: Weaving Self-Evidence: A Sociology of Logic. Princeton: Princeton University Press.

Rota, G.-C., 1997: Indiscrete Thoughts. Boston: Birkhäuser.

Roth, W.-M., 1994: Thinking with hands, eyes, and signs: multimodal science talk in a grade 6/7 unit on simple machines. Interactive Learning Environments 4 (2): 170–177.

Rotman, B., 1993: Ad Infinitum . . . The Ghost in Turing's Machine. Stanford, CA: Stanford University Press.

Rotman, B., 2000: Mathematics as Sign: Writing, Imagining, Counting. Stanford, CA: Stanford University Press.

Schmitt, R., 2001: Die Tafel als Arbeitsinstrument und Statusrequisite. In: Z. Ivanyi / A. Kertesz (Hg.): Gesprächsforschung: Tendenzen und Perspektiven. Frankfurt/Main: Lang, S. 221–242.

Steenrod, N. E. / Halmos, P.R. / Schiffer, M.M. / Dieudonné, J.A., 1973: How to Write Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society.

Suchman, L. A. / Trigg, R.H., 1993: Artificial intelligence as craftwork. In S. Chaiklin und J. Lave (Hg.), Understanding Practice: Perspectives on Activity and Context. Cambridge: Cambridge University Press, S. 144–178.

Warwick, A., 2003: Masters of Theory: Cambridge and the Rise of Mathematical Physics. Chicago: University of Chicago Press.

Weber, K., 2004: Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. Journal of Mathematical Behavior 23(2): 115–133.

Wittgenstein, L., 1984: Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik. Frankfurt/Main: Suhrkamp.