Friedrich Vogel
Universität Bamberg, FRG

Ein Verfahren zur Klassifikation von Merkmalsträgern anhand komparativer und gemischter Merkmale*

Vogel, F.: Ein Verfahren zur Klassifikation von Merkmalsträgern anhand komparativer und gemischter Merkmale. (A cluster analysis method for objects characterized by ordinal and mixed variables)
In: Int. Classif. 10 (1983) No. 1, p. 15–18, 3 refs.

A new method of cluster analysis for objects characterized by ordinal-scaled and mixed variables is described, that is a partitioning method with an iterative relocation procedure. The search for objects which should be reallocated to another cluster is based on a clustering criterion defined for nominal-scaled and/or ordinal-scaled variables. This clustering criterion possesses properties comparable to the trace *(W)* criterion for metric variables. Starting point of the discussion and methodical foundation are measures for dispersion for nominal and ordinal variables with desirable properties. Thereafter the partitioning methods for ordinal, for nominal and for ordinal and nominal variables are discussed. In order to include metric variables it is necessary to transform these variables into ordinal variables. By this transformation only the "distance-information" of metric variables is lost, the "order-information" is preserved to an extent which is controllable by the user. (Author)

1. Vorbemerkung

Jeder, der sich heutzutage mit Fragen der praktischen Anwendung von Verfahren der Numerischen Klassifikation – insbesondere in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften – beschäftigt, weiß, daß es derzeit in diesem Bereich zumindest drei weitestgehend ungelöste Probleme gibt:

1. Die Notwendigkeit der Normierung bei unterschiedlich skalierten (dimensionierten) metrischen Merkmalen (das ist das bekannte Invarianzproblem).
2. Es gibt keine leistungsfähigen Klassifikationsverfahren für komparative (ordinal-skalierte) Merkmale, für deren Ausprägungen kein Abstand definiert ist.
3. Es ist derzeit nicht möglich, Merkmalsträger zu klassifizieren, die durch metrische und komparative und klassifikatorische (nominal-skalierte) Merkmale gekennzeichnet sind, es sei denn, man ist bereit, erhebliche Informationsverluste hinzunehmen.

Ich werde im folgenden über einen Vorschlag zur Lösung dieser Probleme berichten. Grundlegend dafür ist eine Arbeit über "Ein Streuungsmaß für komparative Merkmale", die ich kürzlich gemeinsam mit meinem Mitarbeiter, Reinhard Dobbener, veröffentlicht habe (1), vergl. auch (2).

* Presented at: 6. Jahrestagung der Gesellschaft für Klassifikation, Spezielle Interessengruppe "Numerische Klassifikation", Augsburg, FRG, 1 July 1982

2. Methodische Grundlagen

2.1 Streuung klassifikatorischer Merkmale

Das zu beschreibende Verfahren beruht ganz entscheidend auf der Entropie. Für klassifikatorische (nominalskalierte) Merkmale ist die mittlere Entropie ein inzwischen gebräuchliches Streuungsmaß, dessen Eigenschaften mit denen der Varianz vergleichbar sind. Die Entropie ist für das i-te Merkmal A_i wie folgt definiert

$$H(A_i) = \mathrm{ld}\, n - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{L_i} n_{il}\, \mathrm{ld}\, n_{il}\,, \tag{1}$$

dabei ist ld der Logarithmus zur Basis 2, n_{il} sind die absoluten Häufigkeiten der L_i Ausprägungen und n ist die Summe der n_{il}. Man definiert: $0\,\mathrm{ld}\,0 := 0$.

Die Entropie hat vor allem folgende Eigenschaften:

– Sie ist – als Funktion der Häufigkeiten – stetig.
– Es gilt: $0 \leqslant H(A_i) \leqslant \mathrm{ld}\, L_i$, mit $H(A_i) = 0$ für eine Ein-Punkt-Verteilung (Streuung minimal) und $H(A_i) = \mathrm{ld}\, L_i$ für eine Gleichverteilung; (Streuung maximal).

Mithin ist die Entropie auf das Intervall $[0;1]$ normierbar:

$$0 \leqslant \frac{H(A_i)}{\mathrm{ld}\, L_i} = H(A_i)_{norm.} \leqslant 1\,. \tag{2}$$

Die totale Entropie

$$H_T(A_i) = n \cdot H(A_i) \tag{3}$$

ist ein mit der Fehlerquadratsumme vergleichbares Streuungsmaß für klassifikatorische Merkmale, das wegen

$$0 \leqslant H_T(A_i) \leqslant n \cdot \mathrm{ld}\, L_i \tag{4}$$

auf das Intervall $[0;n]$ normiert werden kann,

$$0 \leqslant \frac{H_T(A_i)}{\mathrm{ld}\, L_i} = H_T(A_i)_{norm.} \leqslant n\,, \tag{5}$$

und dann, wie die normierte mittlere Entropie auch, unabhängig von der jeweiligen Anzahl der Ausprägungen L_i ist.

Für m (statistisch unabhängige) klassifikatorische Merkmale, also für eine Datenmatrix $\underline{X}$ vom Typ (m,n), ist die gemeinsame normierte Entropie (Streuung) durch

$$H(\underline{X})_{norm.} = \sum_{i=1}^{m} H(A_i)_{norm.} \tag{6}$$

und die gemeinsame normierte totale Entropie durch

$$H_T(\underline{X})_{norm.} = n \sum_{i=1}^{m} H(A_i)_{norm.} \tag{7}$$

gegeben.

Abschließend hierzu sei erwähnt, daß die Entropie – wie die Fehlerquadratsumme auch – zerlegt werden kann in die Entropie innerhalb der Klassen und die Entropie zwischen den Klassen.

2.2 Streuung komparativer Merkmale

Mit Hilfe der Entropie läßt sich ein Streuungsmaß für komparative Merkmale konstruieren, welches die vorgegebene Rangordnung der Merkmalsausprägungen berücksichtigt und varianzähnliche Eigenschaften besitzt.

Sei U_i ein komparatives Merkmal mit endlich vielen Ausprägungen L_i

$$U_i^{(1)} < U_i^{(2)} < \cdots < U_i^{(l)} < \cdots < U_i^{(L_i)}, \quad (8)$$

denen die absoluten Häufigkeiten

$$n_{i1}, n_{i2}, \ldots, n_{il}, \ldots, n_{iL_i} \quad (9)$$

zugeordnet sind. (Es kann o.B.d.A. angenommen werden, daß die Ausprägungen Ordinalzahlen sind.)

Die Verteilung eines solchen komparativen Merkmals läßt sich kumulieren.

$$\sum_{l>p} n_{il} = n_{ip}^* \; (l=2,3,\ldots,L_i; p=1,2,\ldots,L_i-1) \quad (10)$$

gibt zum Beispiel an, wie groß die Anzahl der Merkmalsträger mit Ausprägungen $U_i^{(l)}$, die größer als eine vorgegebene Ausprägung $U_i^{(p)}$ sind, ist.

Entsprechend ist

$$n = \sum_{l>p} n_{il} = n - n_{ip}^* \quad (11)$$

die Anzahl der Merkmalsträger, deren Ausprägungen $U_i^{(l)}$ kleiner oder höchstens gleich der vorgegebenen Ausprägung $U_i^{(p)}$ sind.

Betrachtet man nun die kumulierten absoluten Häufigkeiten

$$n_{ip}^* \text{ und } n - n_{ip}^* \text{ für } p = 1, 2, \ldots, L_i - 1 \quad (12)$$

als Häufigkeiten binärer Merkmale, dann ist es zulässig, die Verteilung eines komparativen Merkmals U_i mit L_i Ausprägungen in L_i-1 selbständige binäre Merkmale

$$B_p \; (p=1,2,\ldots,L_i-1) \quad (13)$$

zu transformieren.

Die Verteilungen der binären Merkmale B_p sind durch die absoluten Häufigkeiten

binäres Merkmal	absolute Häufigkeiten der 1. Ausprägung	2. Ausprägung
B_1	n_{i1}^*	$n - n_{i1}^*$
B_2	n_{i2}^*	$n - n_{i2}^*$
⋮	⋮	⋮
B_p	n_{ip}^*	$n - n_{ip}^*$
⋮	⋮	⋮
B_{L_i-1}	$n_{iL_i-1}^*$	$n - n_{iL_i-1}^*$

gekennzeichnet.

Die kumulierten Häufigkeiten eines komparativen Merkmals werden also auf die binären Merkmale übertragen. Dabei bleibt die Ordnungsstruktur (die Ordnungsinformation) des komparativen Merkmals voll erhalten, denn die binären Merkmale sind im allgemeinen nicht statistisch unabhängig.

Wird die Verteilung eines komparativen Merkmals U_i mit L_i Ausprägungen auf L_i-1 selbstständige binäre Merkmale B_p $(p=1,2,\ldots,L_i-1)$ abgebildet, dann ist die mittlere Entropie (Streuung) eines jeden binären Merkmals durch

$$H(B_p) = \mathrm{ld}\, n - \frac{1}{n}\left[n_{ip}^* \,\mathrm{ld}\, n_{ip}^* + (n-n_{ip}^*)\,\mathrm{ld}\,(n-n_{ip}^*)\right], \quad (14)$$

$$p = 1, 2, \ldots, L_i - 1,$$

gegeben, so daß – unter Ausnützung des Additivitätseigenschaft der Entropie –

$$S(U_i) = \sum_{p=1}^{L_i-1} H(B_p) \quad (15)$$

als Streuungsmaß des komparativen Merkmals U_i aufgefaßt werden kann.

Dieses Streuungsmaß hat eine ganze Reihe wünschenswerter Eigenschaften, von denen ich aber nur die wichtigsten nennen werde.

1. Da zur Berechnung von $S(U_i)$ nur die kumulierten Häufigkeiten verwendet werden, ist das Maß völlig unabhängig von der Art der Kodierung der Ausprägungen $U_i^{(l)}$. Es wird lediglich vorausgesetzt, daß in der Menge der (vorgegebenen) Ausprägungen eine Ordnungsrelation existiert.
2. Mithin ist $S(U_i)$ sowohl invariant gegenüber Verschiebungen als auch invariant gegenüber bijektiven monotonen Transformationen der Ausprägungen.
3. $S(U_i)$ ist, als Funktion der Häufigkeiten, stetig.
4. Aus der Konstruktion von $S(U_i)$ folgt, daß die L_i-1 binären Merkmale im allgemeinen nicht statistisch unabhängig sind. Vor allem diese Eigenschaft ist für die Streuungsmessung von besonderer Bedeutung, denn sie bewirkt, daß die in der Ordnungsrelation der Ausprägungen $U_i^{(l)}$ und den kumulierten Häufigkeiten enthaltene Information (und nur diese) über die Streuung des komparativen Merkmals adäquat auf die binären Merkmale übertragen wird, so daß die Ordnungs-Eigenschaften des komparativen Merkmals erhalten bleiben.
5. Es gilt

$$0 \leqslant S(U_i) \leqslant L_i-1, \quad (16)$$

dabei ist $S(U_i) = 0$, falls $n_{il_o} = n$ für irgendein l_o (Streuung minimal), und $S(U_i) = L_i-1$, falls $n_{i1} = n_{iL_i} = n/2$ (Streuung maximal).

Daraus folgt, daß $S(U_i)$ auf das Intervall $[0,1]$ normiert werden kann:

$$0 \leqslant S(U_i)_{\text{norm.}} = \frac{S(U_i)}{L_i-1} \leqslant 1\,. \quad (17)$$

6. Die gemeinsame Streuung von m komparativen Merkmalen läßt sich – analog zur Entropie und Fehlerquadratsumme – durch

$$\sum_{i=1}^{m} S(U_i) \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^{m} S(U_i)_{\text{norm.}} \quad (18)$$

messen.

7. Wird eine Gesamtheit G vom Umfang n in K Klassen vom Umfang $n_k, k=1,2,\ldots,K$, zerlegt, so läßt sich auch die Streuung eines komparativen Merkmals $S(U_i) = S(U_i)_G$ zerlegen, und zwar in eine interne Streuung $S(U_i)_{\text{int.}}$ und eine externe Streuung $S(U_i)_{\text{ext.}}$, so daß

$$S(U_i)_G = S(U_i)_{\text{int.}} + S(U_i)_{\text{ext.}}\;; \quad (19)$$

dabei ist

$$S(U_i)_{\text{int.}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K} n_k \cdot S(U_i)_k \quad (20)$$

und $S(U_i)_k$ ist die Streuung des Merkmals U_i innerhalb der k-ten Klasse.

Es gilt:

$$0 \leqslant S(U_i)_{int.} \leqslant S(U_i)_G \,, \tag{21}$$

mit $S(U_i)_{int.} = 0$, falls $S(U_i)_k = 0$ für alle k (in allen Klassen Ein-Punkt-Verteilungen), und $S(U_i)_{int.} = S(U_i)_G$, falls sich die Verteilungen von U_i in allen k Klassen nicht unterscheiden.

3. Klassifikationsverfahren

3.1 Einführendes

Verfahren der Numerischen Klassifikation haben (im allgemeinen) die Aufgabe, eine gegebene Menge von n Merkmalsträgern, die durch m Merkmale gekennzeichnet sind, derart in disjunkte Klassen zu zerlegen, daß die Merkmalsträger, die einer Klasse zugeordnet werden, einander bezüglich aller Merkmale in einem bestimmten Sinne möglichst "ähnlich" sind. Die Klassen selbst sollen sich möglichst stark unterscheiden.

Bei einer ganzen Reihe gebräuchlicher Klassifikationsverfahren gelten die Merkmalsträger einer Klasse dann als "ähnlich", wenn die Streuung innerhalb dieser Klasse klein ist und eine Partition der Gesamtheit in K Klassen (P_K) gilt dann als gut, wenn die Streuung innerhalb der K Klassen minimal ist.

Nachdem nunmehr auch für komparative Merkmale ein Streuungsmaß mit den erforderlichen Eigenschaften existiert, ist es naheliegend, für die Klassifikation von Merkmalsträgern anhand komparativer Merkmale geeignete Verfahren zu entwickeln. Ich werde zeigen, daß mit einem solchen Verfahren auch gemischte Merkmale verarbeitet werden können.

Grundlage der Ausführungen ist die folgende Datenmatrix $\underline{X}$ vom Typ (m,n):

$$\underline{X} = \begin{array}{c|l|} & 1 \;\dots\; j \;\dots\; n \\ \hline 1 & \} \; m_1 \;\; \text{komparative M'} \\ \vdots & \\ \hline i & \} \; m_2 \;\; \text{klassifikatorische M'} \\ \hline \vdots & \} \; m_3 \;\; \text{metrische M'} \\ m & \\ \hline \end{array} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \hline \underline{X}_2 \\ \hline \underline{X}_3 \end{bmatrix}$$

Eine Gesamtheit vom Umfang n soll in K Klassen zerlegt werden. Die Merkmalsträger sind durch m_1 komparative und m_2 klassifikatorische und m_3 metrische Merkmale, insgesamt also durch $m_1 + m_2 + m_3 = m$ Merkmale gekennzeichnet.

Obwohl wir auch ein leistungsfähiges hierarchisches Verfahren entwickelt haben, werde ich mich hier darauf beschränken, ein Austauschverfahren für komparative Merkmale zu beschreiben.

Austauschverfahren versuchen bekanntlich, eine gegebene (meist zufällige) Startpartition der Gesamtheit in K Klassen (P_K) iterativ bezüglich eines bestimmten Gütekriteriums

$$g(\underline{X},P_K) \tag{22}$$

zu verbessern. Dabei wird sukzessiv für jeden einzelnen Merkmalsträger geprüft, ob es – im Hinblick auf die Gütefunktion – von Vorteil ist, diesen Merkmalsträger aus seiner Klasse zu entfernen und einer anderen Klasse zuzuordnen. Wenn eine Verbesserung – in der Regel eine Verkleinerung – der Gütefunktion möglich ist, wird der Merkmalsträger jener Klasse zugeordnet, die die größte Verkleinerung der Gütefunktion bewirkt. Dieses Vorgehen wird so lange fortgesetzt, bis eine weitere Verkleinerung der Gütefunktion – zumindest auf diese Weise – nicht mehr möglich ist. Dadurch wird ein zumindest "lokales Minimum" der Gütefunktion gefunden.

Austauschverfahren haben den Vorteil, daß sie durch die Verwendung geeigneter Gütefunktionen relativ leicht an die verschiedenen Merkmalstypen angepaßt werden können.

3.2 Ein Verfahren für komparative Merkmale

Gütefunktionen werden in der Regel aus Streuungsmaßen abgeleitet, die für den jeweiligen Merkmalstyp zulässig sind.

Unter Verwendung des oben definierten Streuungsmaßes für komparative Merkmale ist

$$g(\underline{X}_1,P_K) = \sum_{k=1}^{K} n_k \sum_{i=1}^{m_1} S(U_i)_{norm.,k} = \tag{23}$$

$$= n \sum_{i=1}^{m_1} S(U_i)_{norm.,int.} \to \min_{P_K}.$$

eine geeignete Gütefunktion, die Werte des Intervalls $[0,m_1 n]$ annehmen kann.

Die Verwendung der normierten Streuungen innerhalb der Klassen – also von $S(U_i)_{norm.,k}$ – hat dabei den Vorteil, daß jedes komparative Merkmal U_i – unabhängig von der Anzahl seiner Ausprägungen L_i – mit einem numerisch gleichen (maximalen) Gewicht in den Klassifikationsprozeß eingeht, denn die normierte Streuung eines jeden komparativen Merkmals variiert im Intervall $[0,1]$. Dabei erscheint wesentlich, daß dies nicht nur für den gesamten Datensatz, sondern auch für die einzelnen Klassen gilt.

Mit dieser Gütefunktion ist – wie erste Experimente gezeigt haben – ein leistungsfähiges Klassifikationsverfahren für komparative Merkmale definiert.

Wenn die Anzahl der komparativen Merkmale m_1 und auch die jeweilige Anzahl ihrer Ausprägungen L_i groß ist, ist jedoch die Anzahl der zu verarbeitenden binären Merkmale erheblich (Speicherplatz). Bei praktischen Anwendungen hat sich allerdings gezeigt, daß die Anzahl der Ausprägungen komparativer Merkmale selten größer als sieben ist.

3.3 Ein Verfahren für klassifikatorische Merkmale

Ganz analog ist mit der Gütefunktion

$$g(\underline{X}_2,P_K) = \sum_{k=1}^{K} n_k \sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} H(A_i)_{norm.,k} \to \min_{P_K} \,, \tag{24}$$

$$0 \leqslant g(\underline{X}_2,P_K) \leqslant m_2 n \,,$$

ein Austauschverfahren für klassifikatorische Merkmale definiert.

Diese Gütefunktion basiert – wie die Gütefunktion für komparative Merkmale auch – auf Entropien, die auf das Intervall $[0,1]$ normiert sind, so daß auch jedes klassifikatorische Merkmal A_i – unabhängig von der Anzahl der Ausprägungen L_i – mit einem numerisch gleichen (maximalen) Gewicht in die Klassenbildung eingeht. Sowohl im gesamten Datensatz wie auch innerhalb der Klassen variiert der numerische Beitrag eines jeden Merkmals zur Gesamtstreuung zwischen 0 und 1.

3.4 Ein Verfahren für gemischte Merkmale

3.4.1 Komparative und klassifikatorische Merkmale

Die Konstruktion der Gütefunktionen $g(\underline{X}_1,P_K)$ und $g(\underline{X}_2,P_K)$ in Verbindung mit der Additivitätseigenschaft der Entropie läßt es zu, mit

$$g(\underline{X}_1|\underline{X}_2,P_K) = g(\underline{X}_1,P_K) + g(\underline{X}_2,P_K) \to \min_{P_K}, \tag{25}$$

$$0 \leqslant g(\underline{X}_1|\underline{X}_2,P_K) \leqslant (m_1+m_2)n,$$

eine Gütefunktion – und damit ein Austauschverfahren – für komparative *und* klassifikatorische Merkmale zu definieren.

Die Normierung der Entropien bewirkt dabei, daß die einzelnen komparativen Merkmale $U_i, i = 1, 2, \ldots, m_1$, – auch innerhalb der Klassen – das numerisch gleiche (maximale) Gewicht wie die einzelnen klassifikatorischen Merkmale $A_i, i = m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2$, besitzen. Die beiden Teile der Gütefunktion haben – wie es sein soll – ein Gewicht, das nur von den einzelnen Streuungen und der Anzahl der Merkmale eines jeden Typs abhängt. Kein Merkmal kann andere Merkmale numerisch dominieren.

3.4.2 Die Einbeziehung metrischer Merkmale

Die Einbeziehung metrischer Merkmale in das oben beschriebene Austauschverfahren ist nicht ohne jeglichen Informationsverlust möglich.

Angesichts der Tatsache,

- daß wegen der im allgemeinen unterschiedlichen Dimension metrischer Merkmale eine – wie immer geartete – Normierung der metrischen Merkmale unumgänglich ist und eine Normierung in vielen Fällen nur auf der Basis des gesamten Datensatzes möglich ist,
- daß die Klassifikationsergebnisse in der Regel nicht unwesentlich von der jeweiligen Art der Normierung abhängen,
- daß keine der gebräuchlichen Normierungen für praktische Anwendungen ausgezeichnet ist und schließlich
- daß DOBBENER (2) nachgewiesen hat, daß dieses Invarianzproblem zumindest bei Verwendung von Distanzen offenbar nicht lösbar ist (3),

scheint es vorteilhaft zu sein, auf gewisse – ohnehin häufig nicht eindeutig verwertbare – Abstands-Informationen metrischer Merkmale zu verzichten und das Invarianzproblem auf eine völlig andere Weise zu lösen.

Wird der Wertebereich eines metrischen Merkmals X_i in L_i disjunkte, aber nicht notwendigerweise äquidistante Klassen (Intervalle) eingeteilt, dann können die Klassenmitten oder Klassenmittelwerte oder – wenn die Klassen aufsteigend durchnumeriert werden – die Klassennummern (Ordinalzahlen) wie Ausprägungen eines komparativen Merkmals behandelt und den Merkmalsträgern – anstelle der metrischen Merkmalswerte – zugeordnet werden.

Werden die metrischen Merkmale auf diese Weise in komparative Merkmale transformiert, so bleiben die Informationen über die Größenordnung der Merkmalswerte erhalten. Diese Ordnungs-Information kann durch eine zweckdienliche Festlegung der Anzahl der Intervalle und der Intervallgrenzen mit nahezu beliebiger Genauigkeit ausgeschöpft werden, denn für die Anzahl der Intervalle, also der Ausprägungen des komparativen Merkmals, gibt es theoretisch nur die Einschränkung, daß sie endlich sein muß. Für praktische Anwendungen dürfte es wohl ausreichen, metrische Merkmale in komparative Merkmale mit weniger als 20 Ausprägungen zu transformieren; doch sind die diesbezüglichen Experimente noch nicht abgeschlossen.

Bei dieser Transformation gehen lediglich Abstands-Informationen verloren. Doch diese Informationen sind – im allgemeinen – von nur geringer praktischer Bedeutung. Hinzu kommt, daß zum Beispiel im Bereich der Sozial- und Wirtschaftswissenschaften zahlreiche Merkmale entweder komparativ oder zumindest in ihrem Kern vom Typ "komparativ" sind oder nur ihre Ordnungs-Information von Interesse ist (auch wenn sie wie metrische Merkmale behandelt werden).

Nach der Transformation aller metrischen in komparative Merkmale enthält die Datenmatrix $\underline{X}$ nur noch komparative und klassifikatorische Merkmale, so daß mit der oben angegebenen Gütefunkton,

$$g(\underline{X}_1|\underline{X}_2,P_K) \to \min_{P_K},$$

$$0 \leqslant g(\underline{X}_1|\underline{X}_2,P_K) \leqslant m\,n$$

Merkmalsträger anhand gemischter Merkmale iterativ klassifiziert werden können.

4. Schlußbemerkung

Für das zuvor beschriebene Klassifikationsverfahren existiert bereits die 0-Version eines recht umfangreichen Programmpakets. Erste Experimente haben die erwartete Leistungsfähigkeit des Verfahrens bestätigt.

Quellen:

(1) Vogel, F., Dobbener, R.: Ein Streuungsmaß für komparative Merkmale. Jahrb. f. Nationalökonomie und Statistik. 197/2 (1982), p. 145–157.

(2) Dobbener, R.: Grundlagen der Numerischen Klassifikation anhand gemischter Merkmale. Dissertation. Bamberg 1982. (noch nicht veröffentlicht).

(3) Dobbener, R.: Zur Skalen- und Translationsinvarianz von Metriken. Int. Classif. 8 (1981) No. 2, p. 64–68.

Address:
Prof. Dr. Friedrich Vogel, Lehrstuhl für Statistik
Universität Bamberg, Feldkirchenstr. 21, 8600 Bamberg