Methodus Nº 8 (2016) pp. 7 - 32

Logische Folgerung in umgangssprachlichen Argumenten – eine filterlogische Definition

Christoph Schamberger/Jörg Hardy

Abstract

This paper proposes a formal definition of entailment (logical consequence) by means of a filter logic which does justice to the peculiar characteristics of ordinary language arguments. Filter logics do not accept the application of the classical Tarskian notion of entailment to arguments that are expressed in ordinary language. The proposed filter logical definition of entailment filters out some of the classically valid arguments by way of making a few extra conditions in order to restrict the set of entailments to those arguments that satisfy all conditions. Thereby, it excludes many undesirable inferences in which—above all—a false conclusion can be derived from true premises (expressed in ordinary language). In contrast to relevance logics, the proposed filter logic allows for disjunctive syllogism.

Die klassische modelltheoretische Semantik definiert „logische Folgerung" als Wahrheitstransfer: Die Konklusion folgt logisch aus der Menge der Prämissen genau dann, wenn jedes Modell der Menge der Prämissen ein Modell der Konklusion ist; in diesem Fall ist es unmöglich, dass die Prämissen wahr sind und die Konklusion falsch ist (Tarski 1936, S. 8 f.). Im Folgenden bezeichnen wir ein Argument genau dann als *klassisch gültig*, wenn es mindestens eine klassisch gültige logische Form hat, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn jede extensionale, zweiwertige Interpretation, die den logischen Formen aller Prämissen den Wahrheitswert *wahr* zuweist, der logischen Form der Konklusion denselben Wahrheitswert zuweist. Wird die klassische Logik auf umgangssprachliche Argumente angewendet, ergibt sich allerdings eine Schwierigkeit: Die folgenden Argumente sind der obigen Definition nach klassisch gültig. Wie es scheint, folgt jedoch die Konklusion nicht aus den Prämissen. (Die logische Form eines Arguments, kurz: Argumentform, symbolisieren wir unter Verwendung des Doppelpfeils „⇒". Dieser steht für den Schluss, d. h. den Übergang von den Prämissen zur Konklusion.)

Ex falso quodlibet:

(a) $A \;\&\; \neg A \Rightarrow B$

Hilary Clinton wird di*e fünfundvierzigste Präsidentschaft der USA antreten, und sie wird diese Präsidentschaft nicht antreten. Also ist Madrid die Hauptstadt Italiens.*

(b) $\neg A \Rightarrow A \supset B$

Es ist nicht der Fall, dass *die SPD in der nächsten Bundestagswahl die absolute Mehrheit erreicht. Wenn also die SPD in der nächsten Bundestagswahl die absolute Mehrheit erreicht, dann wird Udo Lindenberg Bundeskanzler.*

(c) $\forall x \neg Fx \Rightarrow \forall x(Fx \supset Gx)$

Platon *hat*te *keine Kinder. Also waren die Kinder Platons verheiratet.*

(d) $\exists x \neg Fx \Rightarrow \exists x(Fx \supset Gx)$

Es gibt jemanden, der sich nicht in Italien aufhält. Also *gibt es jemanden, der in Brasilien ist, wenn er sich in Italien aufhält.*

Verum ex quolibet:

(e) $A \Rightarrow B \vee \neg B$

Madrid ist die Hauptstadt Italiens. Also wird Hilary Clinton die fünfundvierzigste Präsidentschaft der USA antreten, oder sie wird diese Präsidentschaft nicht antreten.

(f) $A \Rightarrow B \supset A$

Hilary Clinton wird die fünfundvierzigste Präsidentschaft der USA antreten. Wenn also Hilary Clinton auf eine Präsidentschaftskandidatur verzichtet, dann wird sie die fünfundvierzigste Präsidentschaft der USA antreten.

(g) $\forall x Fx \Rightarrow \forall x(Gx \supset Fx)$

Alle (unter den Anwesenden) sind Männer. Also sind di*e Frauen (unter den Anwesenden) Männer.*

https://doi.org/10.5771/0718-2775-2016-8-7

(h) $\exists x Fx \Rightarrow \exists x(Gx \supset Fx)$

Es gibt jemanden, der über 100 Jahre alt ist. Also: gibt es jemanden, der über 100 Jahre alt ist, wenn er unter 18 ist.

Viele Logiker nehmen solche Beispiele zum Anlass, nicht-klassische Semantiken und Kalküle zu entwickeln. Eine weniger radikale Alternative bieten Filterlogiken, die meist auf der klassischen Logik aufbauen und nur den Folgerungsbegriff neu definieren, und zwar in der Weise, dass die Konklusion aus den Prämissen genau dann folgt, wenn das Argument klassisch gültig ist und einige Zusatzbedingungen erfüllt. Die Zusatzbedingungen filtern problematische Argumente durch semantische oder syntaktische Einschränkungen aus der Menge der klassisch gültigen Argumente heraus (Priest 2008, 9.7.12). In diesem Artikel schlagen wir einen neuen Filter vor und definieren einen Begriff der logischen Folgerung eines umgangssprachlichen Arguments, kurz: umgangssprachliche logische Folgerung. Für Argumente mit modallogischen Ausdrücken wie „möglich", „notwendig", „geboten", „erlaubt" usw. müsste die Definition angepasst werden. Da wir dies aus Raumgründen nicht leisten können, beanspruchen wir hier lediglich, den Begriff der logischen Folgerung für umgangssprachliche Argumente ohne Modalausdrücke definieren zu können. Unsere Definition wird formal und präzise sein, denn es wird mit formalen Verfahren genau feststellbar sein, ob ein umgangssprachliches Argument unter die Definition fällt.

Im ersten Abschnitt erklären wir kurz, warum die oben aufgeführten Argumente (und alle weiteren Argumente mit denselben logischen Formen) keine Folgerung aufweisen. Wie wir im zweiten Abschnitt zeigen möchten, bieten andere filterlogische Entwürfe keine befriedigende Definition der umgangssprachlichen logischen Folgerung. Deshalb schlagen wir zunächst eine eigene Definition der aussagenlogischen Folgerung vor, wobei wir im dritten Abschnitt eine vorläufige Definition anbieten, die wir im vierten Abschnitt verschärfen. Den Begriff der prädikatenlogischen Folgerung stellen wir im fünften Abschnitt vor. Abschließend erörtern wir die Eigenschaften dieser Folgebeziehung.

1. Informationstransfer

In Argumenten mit widersprüchlichen Prämissen ist es unmöglich, dass sie wahr sind und die Konklusion falsch ist. Dasselbe gilt für Argumente mit logisch wahrer Konklusion. Insofern besteht in Argumenten der Form (a) und (e) ein Wahrheitstransfer, und damit liegt eine logische Folgerung im Sinne der klassischen modelltheoretischen Semantik vor. Aber folgt die Konklusion wirklich aus den Prämissen? Dagegen lässt sich einwenden, dass sich widersprüchliche Prämissen gegenseitig aufheben und überhaupt keine Information enthalten (Strawson 1952, S. 3; Tugendhat/Wolf 1983, S. 59; Hoyningen-Huene 1998, S. 125). Aus nichts folgt nichts. Deshalb vertreten einige Philosophen (z. B. Wessel 1998, S. 144) und auch Programmierer von Wissensdatenbanken (Wagner 1991) anstelle des Grundsatzes *ex falso quodlibet* den Grundsatz *ex contradictione nihil sequitur*: aus einem Widerspruch folgt nichts. Dies legt die Annahme nahe, ein Wahrheitstransfer sei für eine Folgerung zwar notwendig, aber nicht hinreichend (Scheffler/Shramko 1998, S. 230).

Im Folgenden legen wir ein anspruchsvolleres Kriterium für Folgerung zugrunde; wir nennen es das Kriterium des *Informationstransfers*: Eine Konklusion folgt genau dann aus den Prämissen, wenn der gesamte Informationsgehalt der Konklusion in den Prämissen enthalten ist, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind: (i) Der Schluss ist nicht gehaltserweiternd (ampliativ): Die Konklusion geht inhaltlich nicht über die Prämissen hinaus, enthält also keine Informationen, die nicht schon in den Prämissen enthalten sind. (ii) Die Prämissen enthalten mindestens eine Information der Konklusion. (Für eine genauere Erläuterung des Begriffs „Information(sgehalt)“ vgl. Israel/Perry 1990.) In Argumenten der Form (a) und (e) besteht demnach kein Informationstransfer, da die Prämissen und die Konklusion keine gemeinsame Information enthalten. In (a) widersprechen sich die Prämissen und enthalten keine Information. Damit geht die Konklusion inhaltlich über die Prämissen hinaus; der Schluss ist also gehaltserweiternd und verletzt Bedingung (i) des Informationstransfers. Zudem verletzt (a) die Bedingung (ii), weil die Prämisse keine Information der Konklusion enthält. Das Argument der Form (e) verletzt Bedingung (ii).

In den übrigen Argumenten der Einleitung liegt nicht einmal ein Wahrheitstransfer vor. Denn die Prämissen sind wahr oder könnten wahr sein (werden), während die Konklusionen falsch sind. Dagegen ließe sich in Anlehnung an Philon von Megara und Gottlob Frege einwenden, der logische Ausdruck „wenn – dann“ sei eine Wahrheitswerte-Funktion; Bedingungssätze seien genau dann wahr, wenn das mit „wenn", „falls" oder ähnlichen Ausdrücken eingeleitete Antezedens falsch und/oder das Konsequens wahr ist. Diesem Verständnis nach ist etwa die Konklusion unseres Beispiels (b) „Wenn also die SPD in der nächsten Bundestagswahl die absolute Mehrheit erreicht, dann wird Udo Lindenberg Bundeskanzler" wahr, wenn die SPD, wie von der Prämisse behauptet, keine absolute Mehrheit erreicht. Dieser Einwand verdiente eine längere Diskussion (vgl. Schamberger 2015, 1. Kapitel; Hardy/Schamberger 2012, S. 65-67), die hier jedoch den Rahmen sprengte. Im Weiteren unterstellen wir, dass Sprecher den Ausdruck „wenn – dann" nicht bloß als Wahrheitswertefunktion verwenden; im Wenn-Teil benennen sie Ereignisse, Zustände, Zeitpunkte oder Orte, bei denen der im Hauptsatz beschriebene Sachverhalt eintritt. Die meisten assertorischen Bedingungssätze beschreiben damit einen Grund-Folge-Zusammenhang (Strawson 1986, S. 230-234, vgl. Schamberger 2015, Abschnitt 1.4). So drückt die Konklusion einen kausalen Zusammenhang zwischen dem Wahlergebnis der SPD und Udo Lindenbergs Kanzlerschaft aus. Da ein solcher Zusammenhang nicht besteht, ist sie falsch.

Selbst wenn wir bereit wären, den Ausdruck „wenn – dann" als Wahrheitswertefunktion aufzufassen, ist immer noch fraglich, ob die Argumente ohne Bedingungssatz einen Wahrheitstransfer aufweisen. Betrachten wir das Beispiel zu (c): Die Konklusion „Also waren die Kinder Platons verheiratet" setzt stillschweigend voraus, dass Platon Kinder hatte. Diese Voraussetzung ist aber nicht erfüllt, weil Platon keine Kinder hatte (die Prämisse „Platon hatte keine Kinder" ist nach heutigem Wissensstand wahr). Eine Aussage mit einer nicht erfüllten Voraussetzung ist entweder falsch (so Wessel 1998, S. 157 f.) oder ohne Wahrheitswert (so Strawson 1952, S. 18 und 173-176). Wahr ist sie jedenfalls nicht. Folglich besteht kein Wahrheitstransfer.

2. Andere Filterlogiken

In diesem Abschnitt bieten wir eine gedrängte Übersicht über die Geschichte der Filterlogik. Im Vordergrund steht die Frage, wie die verschiedenen Ansätze mit den Argumenten der Einleitung umgehen. Aufbauend auf früheren Arbeiten (Wright 1957, S. 181; Geach 1981, S. 179-181) wurde die erste filterlogische Definition der Folgerung von Timothy Smiley vorgeschlagen:

> We can formulate the definition of entailment quite simply as follows: –
>
> $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ if and only if the implication $A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n \supset B$ is a substitution instance of a tautology $A'_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A'_n \supset B'$, such that neither $\vdash B'$ nor $\vdash \neg(A'_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A'_n)$. (Smiley 1959, S. 240)

Diese Definition weist die typischen Merkmale einer filterlogischen Definition des Folgerungsbegriffs auf: Sie ist parasitär, d. h. sie setzt ein bestimmtes logisches System und dessen Begriff der Tautologie voraus, und sie nennt Einschränkungen, mit denen unerwünschte Tautologien herausgefiltert werden. Smileys Definition filtert allerdings nur die Argumentformen (a) und (e) heraus. In (a) $A \,\&\, \neg A \Rightarrow B$ liegt keine Folgerung vor, da jede tautologische Substitutionsbasis, aus der wir durch universelle Substitution die Formel $(A \,\&\, \neg A) \supset B$ bilden können, ein widersprüchliches Antezedens hat. Dasselbe gilt für die Argumentform (e) $A \Rightarrow B \vee \neg B$, weil jede tautologische Substitutionsbasis, aus der wir die Formel $A \supset (B \vee \neg B)$ erhalten, ein logisch wahres Konsequens hat.

Smileys Definition der Folgerung wird von Neil Tennant aufgegriffen und modifiziert:

> An entailment is a substitution instance of a perfectly valid sequent. A perfectly valid sequent is one that is (classically) valid but ceases to be so upon removal of any of its member sentences. (Tennant 1987, S. 255)

Soweit wir uns auf Schlüsse respektive Sequenzen mit genau einer Prämisse und einer Konklusion beschränken, ist Tennants Definition einer „perfectly valid sequent“ extensional gleich mit Smileys Folgerungsbegriff. Wenn allerdings eine der Prämissen entbehrlich ist, so fällt die Argumentform nicht unter Tennants Definition. So ist in $A, B \Rightarrow A$ die Prämisse B in dem Sinne entbehrlich, dass die Argumentform auch ohne diese Prämisse logisch gültig wäre. Kurioserweise fällt hingegen die Argumentform $A \,\&\, B \Rightarrow A$ unter Tennants Definition. In Hinblick auf die im vorigen Abschnitt aufgezählten Argumentformen macht dies keinen Unterschied: Nur (a) und (e) werden herausgefiltert. Aufgrund mathematischer Erwägungen schlägt Tennant zudem vor, seine Einschränkung des Folgerungsbegriffs auf intuitionistisch gültige Argumentformen anzuwenden (Tennant 1987, Abschnitt 23; ders. 2005, S. 712-715). Soweit bekannt ist Tennant allerdings der einzige, der eine Filterlogiker auf Grundlage einer nicht-klassischen Logik vorschlägt.

Eine ganz andere Filterlogik ist das „System der strengen logischen Folgebeziehung“ von Alexander Sinowjew (1970, 7. Kapitel). Seien α und β aussagenlogische Formeln; $\alpha \Rightarrow \beta$ ist eine gültige Regel der strengen logischen Folgebeziehung genau dann, wenn (1) $\alpha \supset \beta$ eine Tautologie der klassischen Logik ist und (2) in β nur solche Aussagebuchstaben vorkommen, die auch in α vorkommen (ebd., S. 112; vgl. Wessel 1998, S. 142). Horst Wessel entwickelt daraus ein „System der strikten logischen Folgebeziehung“, indem er zu Sinowjews Definition noch eine dritte Bedingung hinzufügt: $\alpha \Rightarrow \beta$ ist eine gültige Regel der strikten logischen Folgebeziehung genau dann, wenn sie (1) und (2) erfüllt und (3) α keine Kontradiktion und β keine klassische Tautologie ist.

Sinowjews und Wessels Systeme filtern die Argumentformen (a) $A \,\&\, \neg A \Rightarrow B$, (b) $\neg A \Rightarrow A \supset B$, (e) $A \Rightarrow B \vee \neg B$ und (f) $A \Rightarrow B \supset A$ als ungültig heraus, weil der Aussagebuchstabe B in der Konklusion, nicht aber in den Prämissen vorkommt. Dies ist ein großer Vorteil gegenüber den Ansätzen von Smiley und Tennant. Der Nachteil ist jedoch: In Sinowjews und Wessels Systemen sind viele Instanzen der Disjunktions-Einführung ungültig. So ist zwar die Argumentform $A \,\&\, B \Rightarrow A \vee B$ eine gültige Regel der strengen bzw. strikten Folgebeziehung, weil beide Aussagebuchstaben der Konklusion in der Prämisse vorkommen, nicht aber $A \Rightarrow A \vee B$. Wessel begründet dies mit der Forderung, dass die „Menge der Sinneinheiten“ der Konklusion in jener der Prämissen enthalten sein müsse (ebd., S. 141). Diese Forderung halten wir jedoch für zu restriktiv. So können wir nicht erkennen, was an einem Argument der Form $A \Rightarrow (A \supset B) \supset B$ zu bemängeln wäre. Wer den Modus ponens akzeptiert, müsste auch in dem folgenden Argument eine Folgerung erkennen: „Mein Kollege hat hohes Fieber. Also bleibt mein Kollege heute zu Hause, falls er, wenn er hohes Fieber hat, zu Hause bleibt.“

Die Filterlogik von Gerhard Schurz und Paul Weingartner ähnelt Sinowjews und mehr noch Wessels System, lässt sich aber auch auf prädikatenlogische und auf modallogische Schlüsse anwenden. (Eine frühere Fassung findet sich in Weingartner/Schurz 1986; wir orientieren uns hier an Schurz 1991, ders. 1999, Orlowska/Weingartner 1997 und Weingartner 2000.) Schurz und Weingartner verfolgen weniger das Ziel, den Begriff der Folgerung neu zu definieren; ihr Interesse gilt vielmehr dem Begriff der Relevanz, den sie anders auffassen als die Relevanzlogiker.

> *A* is a *relevant conclusion* of Γ, or equivalently, the inference $\Gamma \vdash A$ is *C-relevant iff* (i) $\Gamma \vdash A$ is valid and (ii) no predicate *R* in *A* is replaceable on some of its occurrences by *R**, salva validitate of the inference. (Schurz 1999, S. 23)

Eine Konklusion ist demnach genau dann relevant, wenn der jeweilige Schluss gültig ist und in der Konklusion kein Prädikat gegen ein beliebiges anderes ausgetauscht werden kann, ohne dass der Schluss dadurch ungültig wird. Argumente mit irrelevanten Konklusionen sind nach Auffassung von Schurz und Weingartner intuitiv ungültig (im Gegensatz zu Argumenten mit irrelevanten Prämissen; vgl. Schurz 1991, S. 418; Weingartner 2000, S. 318). Insofern können wir ihre Definition der Konklusions-Relevanz durchaus als filterlogische Definition des Folgerungsbegriffs verstehen, wobei eine logische Folgerung genau dann vorliegt, wenn die Konklusion relevant ist.

Das Kriterium der Konklusions-Relevanz entspricht weitgehend den Bedingungen (2) und (3) von Wessel. Einerseits lassen sich Buchstaben der Konklusion, die nicht in den Prämissen vorkommen, *salva validitate* austauschen, andererseits erlauben widersprüchliche Prämissen und logisch wahre Konklusionen einen solchen Austausch. Der Unterschied ist vor allem, dass das Kriterium der Konklusions-Relevanz nicht für Aussagebuchstaben, sondern für Prädikatsbuchstaben gilt, was Aussagebuchstaben als Platzhalter für nullstellige Prädikate einschließt. Dadurch verletzen alle Argumentformen (a) bis (h) dieses Kriterium. Die Argumentformen (a) $A \mathbin{\&} \neg A \Rightarrow B$, (b) $\neg A \Rightarrow A \supset B$, (e) $A \Rightarrow B \vee \neg B$ und (f) $A \Rightarrow B \supset A$ bleiben gültig, wenn wir den Aussagebuchstaben *B* jeweils gegen einen beliebigen anderen Aussagebuchstaben austauschen. In (c) $\forall x \neg Fx \Rightarrow \forall x(Fx \supset Gx)$, (d) $\exists x \neg Fx \Rightarrow \exists x(Fx \supset Gx)$, (g) $\forall x Fx \Rightarrow \forall x(Gx \supset Fx)$ und (h) $\exists x Fx \Rightarrow \exists x(Gx \supset Fx)$ können wir den Prädikatsbuchstaben *G* jeweils *salva validitate* durch einen beliebigen anderen Prädikatsbuchstaben ersetzen.

Allerdings haben auch sämtliche Instanzen der Disjunktions-Einführung keine relevante Konklusion. (Das Kriterium von Schurz und Weingartner ist in dieser Hinsicht noch restriktiver als Bedingung (2) von Sinowjew und Wessel.) Ebenso scheitert die Argumentform $A \Rightarrow (A \supset B) \supset B$ am Kriterium der Konklusions-Relevanz. Das ist misslich, denn an dieser Argumentform ist nichts auszusetzen. Schließlich wäre zu kritisieren, dass oft nur mit beträchtlichem Aufwand herauszufinden ist, ob die Prädikatsbuchstaben der Konklusion *salva validitate* gegen andere Buchstaben ausgetauscht werden können. Schurz (1999, S. 28) bietet hierfür zwar ein syntaktisches Verfahren, das jedoch umständlich werden kann.

Die größte Schwäche der Filterlogiken von Sinowjew, Wessel, Schurz und Weingartner liegt darin, dass sie in Konklusionen mit Konditional nicht unterscheiden, ob das Antezedens für die Ableitung des Konsequens erforderlich ist oder nicht. In der problematischen Argumentform (f) $A \Rightarrow B \supset A$ ist B, das Antezedens der Konklusion, für die Ableitung des Konsequens A nicht erforderlich, weil dieses unmittelbar aus der Prämisse A folgt, d. h. das Antezedens der Konklusion ist entbehrlich. Dies unterscheidet (f) von der akzeptablen Argumentform $A \Rightarrow (A \supset B) \supset B$. Um das Konsequens B abzuleiten, benötigen wir neben der Prämisse A unbedingt auch das Antezedens $(A \supset B)$. Diese Unterscheidung ist der Schlüssel für unsere neue Definition der Folgerung.

3. Aussagenlogische Folgerung: eine vorläufige Definition

Das Ziel der folgenden Abschnitte ist es, eine Definition der umgangssprachlichen logischen Folgerung zu entwickeln. Diese nennt die Bedingungen, unter denen eine umgangssprachliche Konklusion aus umgangssprachlichen Prämissen ohne Modalausdrücke folgt. Da wir Argumente ohne Informationstransfer ausschließen wollen, sollen Argumente mit den logischen Formen (a) bis (h) herausgefiltert werden, ohne dabei alle Argumente auszuschließen, in deren Konklusion eine neue Aussage vorkommt. Argumente der Form $A \Rightarrow (A \supset B) \supset B$ etwa sollten unter diese Definition ebenso fallen wie die Instanzen der Disjunktions-Einführung. Schließlich sollte mit möglichst einfachen formalen Verfahren genau feststellbar sein, ob eine Argumentform unter diese Definition fällt.

Wir schließen uns der verbreiteten Auffassung an, nach der ein umgangssprachliches Argument aus mehreren umgangssprachlichen Aussagen besteht, und zwar aus einer oder mehreren Prämissen und einer Konklusion, verbunden mit dem Hinweis, dass die Konklusion aus den Prämissen folgt oder die Konklusion durch die Prämissen begründet wird (Hitchcock 2007, S. 106-108; vgl. Grice 1991, S. 25 f.). Dieses Verständnis des Begriffs „Argument" schließt Argumente ohne Prämissen aus. Ebenso schließt es Folgerungen auf eine Menge mehrerer Konklusionen aus. Es gibt zwar Argumente mit mehreren Konklusionen; hier liegen jedoch unserer Auffassung nach mehrere Folgerungen vor. Die in diesem Abschnitt behandelte aussagenlogische Folgerung eines umgangssprachlichen Arguments, kurz: umgangssprachliche aussagenlogische Folgerung, ist also eine zweistellige Beziehung zwischen einer Menge umgangssprachlicher Prämissen und genau einer umgangssprachlichen Konklusion (deshalb sprechen wir auch von der Folgebeziehung).

Zunächst geben wir eine vorläufige Definition der umgangssprachlichen aussagenlogischen Folgerung. Sie filtert die folgenden vier Argumentformen heraus:

(a) $A \mathbin{\&} \neg A \Rightarrow B$

(b) $\neg A \Rightarrow A \supset B$

(e) $A \Rightarrow B \vee \neg B$

(f) $A \Rightarrow B \supset A$

Um (b) und (f) herauszufiltern, unterscheiden wir in Konklusionen, deren Hauptoperator ein Konditional ist, zwischen dem Antezedens und dem Konsequens und behandeln das Antezedens ähnlich wie eine Prämisse. Zu diesem Zweck verwenden wir in unserer Definition $\alpha 1, \ldots, \alpha m$ als Platzhalter für logische Formen der Prämissen und $\alpha_{m+1} \supset (\ldots \supset (\alpha_{m+n} \supset \beta) \ldots)$ mit $m \geq 1$ und $n \geq 0$ als Platzhalter für eine logische Form der Konklusion. Dabei ist β eine Teilformel, deren Hauptoperator kein Konditional ist; dies kann auch eine Teilformel sein, in der kein Operator vorkommt. Wenn der Hauptoperator der Konklusion kein Konditional ist (oder in der Konklusion kein Operator vorkommt), fällt die Konklusion mit β zusammen und wir können $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n}$ ignorieren. Wenn hingegen der Hauptoperator der Konklusion ein Konditional ist, so behandeln wir das Antezedens $\alpha m{+}1$ ähnlich wie eine Prämisse. Mehr noch: Ist der Hauptoperator des Konsequens ebenfalls ein Konditional, dann behandeln wir auch das Antezedens des Konsequens α_{m+2} ähnlich wie eine Prämisse usw.

Die vorläufige Definition der umgangssprachlichen aussagenlogischen Folgerung nennt drei notwendige, zusammen nicht hinreichende Bedingungen einer umgangssprachlichen aussagenlogischen Folgerung. Die Bedingungen sind mit semantischen Begriffen formuliert; wir werden sie später auch mit syntaktischen Begriffen formulieren. Die endgültige Definition geben wir im nächsten Abschnitt, wo wir die Bedingungen (2) und (3) verschärfen.

> Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha m$ Platzhalter für logische Formen der Prämissen, und sei $\alpha m+1 \supset (\ldots \supset (\alpha m+n \supset \beta) \ldots)$ mit $m \geq 1$ und $n \geq 0$ ein Platzhalter für eine logische Form der Konklusion, wobei β eine Teilformel sei, deren Hauptoperator kein Konditional ist. Eine umgangssprachliche Konklusion folgt aussagenlogisch aus umgangssprachlichen Prämissen nur dann, wenn mindestens eine aussagenlogische Form der Prämissen und mindestens eine aussagenlogische Form der Konklusion den folgenden Bedingungen genügen:
>
> (1) Jede Interpretation, die allen Formeln der Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ den Wahrheitswert *wahr* zuweist, weist auch der Formel $\alpha_{m+1} \supset (\ldots \supset (\alpha_{m+n} \supset \beta) \ldots)$ den Wahrheitswert *wahr* zu.
>
> (2) Die Formel $\alpha 1 \ \& \ldots \& \ \alpha m+n$ ist erfüllbar.
>
> (3) Zu jeder echten Teilmenge Γ‘ der Menge $\Gamma = \{\alpha_1 \ \& \ldots \& \ \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n}\}$ gibt es jeweils mindestens eine Interpretation, die allen Formeln der Teilmenge Γ‘ den Wahrheitswert *wahr* und der Formel β den Wahrheitswert *falsch* zuweist.

Wir betrachten nun anhand verschiedener Beispiele, wie diese Definition anzuwenden ist. Dabei folgen wir den meisten Filterlogikern und verwenden die klassische Logik als Grundlage unserer Filterlogik. Die obige Definition würde es aber auch erlauben, einen nichtklassischen Interpretationsbegriff zugrunde zu legen. So könnte man wie Tennant die drei Zusatzbedingungen auf intuitionistisch gültige Argumentformen anwenden.

Bedingung (1) macht die Mindestvoraussetzung, dass das Argument logisch gültig sein muss. Nach Bedingung (2) müssen die Prämissen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ und die Antezedenzien der Konklusion *αm+1*, ..., *αm+n* gemeinsam erfüllbar sein. Erfüllbar sind sie genau dann, wenn es mindestens eine Interpretation gibt, die der Konjunktion dieser Formeln den Wahrheitswert *wahr* zuweist, was genau dann der Fall ist, wenn die Formeln einander nicht widersprechen. Diese Bedingung schließt nicht nur Argumente der Form (a) $A \ \& \ \neg A \Rightarrow B$ aus, sondern auch Argumente der Form (b) $\neg A \Rightarrow A \supset B$, weil die Konjunktion der Prämisse und des Antezedens der Konklusion ($\neg A \ \& \ A$) nicht erfüllbar ist.

Obwohl wir es ablehnen, aus widersprüchlichen Prämissen beliebige Folgerungen zu ziehen, wollen wir nicht behaupten, aus widersprüchlichen Prämissen folge gar nichts. So folgt etwa aus einer Aussage der Form $A \ \& \ \neg A$ die Aussage selbst oder eines ihrer Konjunktionsglieder. Überdies ist es ein gängiges Verfahren wissenschaftlicher Kritik, aus inkonsistenten Annahmen einen offensichtlichen Widerspruch abzuleiten und gegebenenfalls per Reductio ad absurdum auf die Verneinung einer Annahme zu schließen. Unsere Definition erlaubt es, auch in solchen Fällen von einer Folgerung zu sprechen. Die Definition verlangt lediglich, mindestens eine logische Form der Prämissen und der Konklusion müsse den drei Bedingungen genügen. Grundsätzlich lassen sich kontradiktorisch entgegengesetzte Aussagen auch durch unterschiedliche Buchstaben formalisieren: „It is a matter of choice which propositions are taken to be atomic." (Epstein 1990, S. 22) Eine Aussage wie „Das Wetter ändert sich nicht" lässt sich als atomare Aussage auffassen. So können wir der Prämisse „Das Wetter ändert sich, und es ändert sich nicht" auch die erfüllbare logische Form $A \ \& \ B$ zuweisen, und daraus folgt nach unserer Definition die Konklusion $A \ \& \ B$ ebenso wie A sowie B. Entscheidend ist allerdings: Aus widersprüchlichen Annahmen folgt keine beliebige Konklusion C. Die Information der Konklusion muss bereits in den Prämissen enthalten sein.

Bedingung (3) filtert zwei Gruppen von Argumentformen heraus: Die einen haben eine logisch wahre Konklusion, die anderen eine Konklusion mit einem entbehrlichen Antezedens. Betrachten wir zunächst Argumentform (e) $A \Rightarrow B \vee \neg B$. Da in der Konklusion kein Konditional vorkommt, fällt sie mit β zusammen und die Prämisse A ist das einzige Element von Γ, d. h. $\Gamma = \{A\}$. Die einzige echte Teilmenge von Γ ist die leere Menge $\Gamma' = \{\ \}$. Da die logisch wahre Konklusion $B \vee \neg B$ in allen Interpretationen wahr ist, gibt es keine Interpretation, die allen Elementen der leeren Teilmenge Γ‘ den Wahrheitswert *wahr* und der Formel $B \vee \neg B$ den Wahrheitswert *falsch* zuweist. Damit ist Bedingung (3) verletzt. Sie filtert allerdings nicht alle Argumente mit logisch wahrer Konklusion heraus. So folgt aus „Das Wetter ändert sich" die Konklusion „Das Wetter ändert sich, oder es ändert sich nicht". Denn wir können der Prämisse die logische Form A und der Konklusion die Form $A \vee B$ zuweisen, und eine Interpretation, in der sowohl A als auch B falsch sind, weist allen Formeln der leeren Teilmenge Γ‘ den Wahrheitswert *wahr* und der Formel $A \vee B$ den Wahrheitswert *falsch* zu. Im Hinblick auf (f) $A \Rightarrow B \supset A$ enthält die Menge Γ zwei Elemente: die Prämisse und das Antezedens der Konklusion, d. h. $\Gamma = \{A, B\}$. Daraus erhalten wir u. a. die echte Teilmenge $\Gamma' = \{A\}$. Als β gilt das Konsequens der Konklusion, also die Teilformel A. Da es keine Interpretation gibt, in der A wahr und zugleich falsch ist, verletzt auch (f) Bedingung (3).

Semantische Überlegungen können für komplexere Argumente recht aufwendig werden. Die vorläufige Definition der umgangssprachlichen aussagenlogischen Folgerung lässt sich jedoch auch mit syntaktischen Begriffen formulieren, und im Anschluss daran können wir ein syntaktisches Verfahren entwickeln, mit dem einfach feststellbar ist, ob eine Argumentform die Kriterien erfüllt. Der Kopf der Definition kann gleich bleiben; nur die drei Bedingungen werden neu formuliert:

(1) Aus der Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ lässt sich die Formel $\alpha_{m+1} \supset (\ldots \supset (\alpha_{m+n} \supset \beta) \ldots)$ ableiten.

(2) Aus der Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n}\}$ lässt sich keine Kontradiktion ableiten.

(3) Aus keiner echten Teilmenge Γ‘ der Menge $\Gamma = \{\alpha_1 \& \ldots \& \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n}\}$ lässt sich die Formel β ableiten.

Diese Definition lässt wiederum die Art der Ableitbarkeitsbeziehung offen. Im Folgenden gehen wir von der klassischen Logik aus und arbeiten mit einem klassischen Kalkül des natürlichen Schließens. Die Bedingungen (1) und (3) lassen sich damit gemeinsam testen. Zu diesem Zweck führen wir nicht nur die Prämissen als Annahmen in die Ableitung ein, sondern auch jedes Antezedens $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n}$ der Konklusion. Derartige Annahmen, die keine Prämissen sind, bezeichnen wir als Zusatzannahmen. Zunächst prüfen wir, ob für die Ableitung von β mindestens eine Prämisse und alle Zusatzannahmen α_{m+1} bis α_{m+n} benötigt werden.

Können wir β ableiten, ohne mindestens eine Prämisse und jede Zusatzannahme α_{m+1} bis α_{m+n} zu verwenden, verletzt die Argumentform die Bedingung (3). Nachdem Bedingung (3) überprüft worden ist, können wir innerhalb desselben Beweises versuchen, die Konklusion abzuleiten. Gelingt dies, so ist das Argument logisch gültig und erfüllt Bedingung (1).

An dieser Stelle sei auf einen Unterschied zu Tennants Folgerungsdefinition hingewiesen: Indem die konjugierten Prämissen $\alpha 1$ & … & α_m genau ein Element von Γ bilden, lässt unsere Definition entbehrliche Prämissen zu. Diese Abschwächung scheint uns geboten, denn es wäre beispielsweise absurd zu leugnen, dass aus den Prämissen *A* und *B* die Konklusion *B* folgt. Nahezu jedes umgangssprachliche Argument enthält Aussagen, die für die Folgerung selbst entbehrlich sind. Meist sind solche Zusätze, d. h. Erläuterungen, Beispiele, Variationen und Wiederholungen, für das Verständnis sehr vorteilhaft. Außerdem leiten wir häufig Folgerungen aus Berichten, Theorien und Weltanschauungen ab, die viel mehr Informationen enthalten, als für die Folgerung erforderlich wären. Die Antezedenzien der Konklusion $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n}$ sind hingegen separate Elemente von Γ. Ein Argument weist schon dann keine Folgerung auf, wenn nur eines dieser Antezedenzien entbehrlich ist.

In den Ableitungen ist es hilfreich, in jeder Zeile die Nummern der (Zusatz-) Annahmen zu notieren, von denen die jeweilige Zeile abhängt. Diese Nummern führen wir links außen an. So ist leichter zu erkennen, ob für die Ableitung von β mindestens eine Prämisse und alle Zusatzannahmen $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n}$ verwendet worden sind. Wie die folgende Ableitung zeigt, folgt aus einer Aussage der Form *A & B* keine Aussage der Form $A \supset B$:

1	(1)	A & B	Annahme
2	(2)	A	Zusatzannahme
1	(3)	B	1, Konjunktions-Beseitigung

Als β gilt *B*, das Konsequens der Konklusion, das in Zeile (3) abgeleitet worden ist. Dort ist links außen nur die Nummer 1 der Prämisse *A & B* angeführt, nicht aber die Nummer 2 der Zusatzannahme *A*. Damit ist bewiesen, dass das Antezedens für die Ableitung des Konsequens nicht erforderlich ist; es gibt also zu der Menge Γ = {*A & B*, *A*} eine echte Teilmenge, aus der sich die Formel *B* ableiten lässt: Γ‘ = {*A* & *B*}; dies verletzt Bedingung (3). Ein Argument der Form $A \supset B \Rightarrow (B \supset C) \supset (A \supset C)$ erfüllt hingegen die Bedingungen (1) und (3). Der Hauptoperator der Konklusion ist ein Konditional; deshalb nehmen wir $B \supset C$, das Antezedens der Konklusion, zusätzlich an. Der Hauptoperator des Konsequens $A \supset C$ ist ebenfalls ein Konditional, und wir nehmen auch das Antezedens *A* zusätzlich an. Als β gilt das Konsequens des Konsequens, also die Teilformel *C*. Zunächst prüfen wir, ob für die Ableitung von *C* sowohl die Prämisse als auch die beiden Zusatzannahmen benötigt werden. Im Anschluss daran leiten wir die Konklusion $(B \supset C) \supset (A \supset C)$ ab:

1	(1)	A ⊃ B	Annahme
2	(2)	B ⊃ C	Zusatzannahme
3	(3)	A	Zusatzannahme
1, 3	(4)	B	1, 3, Modus ponens
1, 2, 3	(5)	C	2, 4, Modus ponens
1, 2	(6)	A ⊃ C	3, 5, Konditional-Einführung
1	(7)	(B ⊃ C) ⊃ (A ⊃ C)	2, 6, Konditional-Einführung ■

Den links außen angeführten Nummern von Zeile (5) ist zu entnehmen, dass *C* sowohl von der einzigen Prämisse (Annahme 1) als auch von den beiden Zusatzannahmen 2 und 3 abhängt. Bedingung (3) ist damit erfüllt. Da wir in Zeile (7) auch die Konklusion ableiten konnten, ist auch Bedingung (1) erfüllt. Bedingung (2) brauchen wir nicht genauer zu untersuchen, denn es ist augenfällig, dass sich aus {$A \supset B$, $B \supset C$, *A*}, der Menge der Prämisse und der Zusatzannahmen, keine Kontradiktion ableiten lässt. Damit genügt ein Argument der Form $A \supset B \Rightarrow (B \supset C) \supset (A \supset C)$ allen drei Bedingungen der vorläufigen Definition.

An dieser Stelle ist allerdings ein Vorbehalt anzumelden: Mit einem Kalkül des natürlichen Schließens lässt sich streng genommen nicht beweisen, dass sich Formeln *nicht* ableiten lassen. Insofern ist auch nicht zu beweisen, dass sich aus der Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n}\}$ keine Kontradiktion ableiten lässt und Bedingung (2) erfüllt ist. Ebenso wenig lässt sich beweisen, dass für die Ableitung von β mindestens eine

Prämisse und alle Zusatzannahmen α_{m+1}, …, α_{m+n} benötigt werden, wie Bedingung (3) es verlangt. Zu beweisen sind nur Verletzungen dieser Bedingungen. Mit Bedingung (1) verhält es sich umgekehrt: Im Kalkül des natürlichen Schließens können wir beweisen, dass sie erfüllt ist, nicht aber, dass sie nicht erfüllt ist. In vielen Fällen, so auch im letzten Beispiel, ist allerdings leicht zu erkennen, dass bestimmte Ableitungen unmöglich sind. Im Zweifelsfall lässt sich mit Hilfe von Wahrheitstafeln eindeutig feststellen, ob Bedingung (1) nicht erfüllt ist und ob die Bedingungen (2) und (3) erfüllt sind.

4. Aussagenlogische Folgerung: eine verschärfte Definition

Die vorläufige Definition erweist sich als zu weit, wenn der Hauptoperator von β eine Konjunktion ist (Gerhard Schurz und David Löwenstein machten uns darauf aufmerksam). Während Argumente der Form (b) $\neg A \Rightarrow A \supset B$ Bedingung (2) der vorläufigen Definition verletzen, entsprechen ihr beispielsweise Argumente der Form $\neg A \Rightarrow (A \supset B) \ \& \ (A \supset C)$, obwohl sie genauso abzulehnen sind. Ein ähnliches Problem stellt sich für Bedingung (3). Sie filtert zwar die Argumentform (f) $A \Rightarrow B \supset A$ heraus, nicht jedoch $A \Rightarrow (B \supset A) \ \& \ (C \supset A)$. Auch $A \Rightarrow (B \vee \neg B) \ \& \ A$ schließt sie im Gegensatz zu (e) $A \Rightarrow B \vee \neg B$ nicht aus. Der Grund für diese Unzulänglichkeit liegt darin: Wenn der Hauptoperator der Konklusion eine Konjunktion ist, fällt die Konklusion mit β zusammen. So etwa im Falle der Argumentform $A \Rightarrow (B \supset A) \ \& \ (C \supset A)$, wo die Menge Γ nur die Prämisse A enthält. Die einzige echten Teilmenge von $\Gamma = \{A\}$ ist die leere Menge $\Gamma' = \{ \}$, aus der sich die Formel $(B \supset A) \ \& \ (C \supset A)$ nicht ableiten lässt. Somit erfüllt die Argumentform die Bedingung (3). Dieselbe Komplikation tritt auf, wenn zwar der Hauptoperator der Konklusion ein Konditional ist, der Hauptoperator des Konsequens jedoch eine Konjunktion. So erfüllen die Argumentformen $A \Rightarrow B \supset (A \ \& \ B)$ und $A \supset B, C \Rightarrow A \supset (C \ \& \ B)$ Bedingung (3), obwohl es auch dazu Gegenbeispiele mit wahren Prämissen und falscher Konklusion gibt:

> Wenn es heute Abend in Berlin regnet, dann sind die Straßen nass.
> Wir werden das Manuskript binnen einer Woche einreichen.
>
> ---
>
> Also: Wenn es heute Abend in Berlin regnet, dann werden wir das Manuskript binnen einer Woche einreichen und die Straßen sind nass.

Die Unzulänglichkeit lässt sich reparieren, indem wir verlangen, jedes Konjunktionsglied von β müsse die Bedingungen (2) und (3) der vorläufigen Definition erfüllen. Die neue Definition der umgangssprachlichen aussagenlogischen Folgerung lässt sich sowohl mit semantischen als auch mit syntaktischen Begriffen formulieren. Ihre drei Bedingungen sind notwendig und zusammen hinreichend.

> Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ Platzhalter für logische Formen der Prämissen, und sei $\alpha_{m+1} \supset (\ldots \supset (\alpha_{m+n} \supset (\beta_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \beta i)) \ldots)$ mit m ≥ 1, n ≥ 0 und i ≥ 1 ein Platzhalter für eine logische Form der Konklusion, wobei β_1 bis β_i Teilformeln seien, deren Hauptoperator kein Konditional und keine Konjunktion ist. Eine umgangssprachliche Konklusion folgt aussagenlogisch aus umgangssprachlichen Prämissen genau dann, wenn mindestens eine aussagenlogische Form der Prämissen und mindestens eine aussagenlogische Form der Konklusion den folgenden Bedingungen genügen:

(1) Jede Interpretation, die allen Formeln der Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ den Wahrheitswert *wahr* zuweist, weist auch der Formel $\alpha_{m+1} \supset (\ldots \supset (\alpha_{m+n} \supset (\beta_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \beta_i)) \ldots)$ den Wahrheitswert *wahr* zu.

(2) Für jede Formel β_1 bis β_i der Form $\gamma_1 \supset (\ldots \supset (\gamma_j \supset \delta) \ldots)$ mit j ≥ 0 gilt: Die Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n}, \gamma_1, \ldots, \gamma_j\}$ ist erfüllbar.

(3) Für jede Formel β_1 bis β_i der Form $\gamma_1 \supset (\ldots \supset (\gamma_j \supset \delta) \ldots)$ mit j ≥ 0 gilt: Zu jeder echten Teilmenge Γ‘ der Menge $\Gamma = \{\alpha_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n}, \gamma_1, \ldots, \gamma_j\}$ gibt es jeweils mindestens eine Interpretation, die allen Formeln der Teilmenge Γ‘ den Wahrheitswert *wahr* und der Formel Δ den Wahrheitswert *falsch* zuweist.

(1) Aus der Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ lässt sich die Formel $\alpha_{m+1} \supset (\ldots \supset (\alpha_{m+n} \supset (\beta_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \beta_i)) \ldots)$ ableiten.

(2) Für jede Formel β_1 bis β_i der Form $\Gamma_1 \supset (\ldots \supset (\Gamma_j \supset \Delta) \ldots)$ mit j ≥ 0 gilt: Aus der Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n}, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_j\}$ lässt sich keine Kontradiktion ableiten.

(3) Für jede Formel β_1 bis β_i der Form $\gamma_1 \supset (\ldots \supset (\gamma_j \supset \delta) \ldots)$ mit j ≥ 0 gilt: Aus keiner echten Teilmenge Γ‘ der Menge $\Gamma = \{\alpha_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n}, \gamma_1, \ldots, \gamma_j\}$ lässt sich die Formel δ ableiten.

In dem Spezialfall i = 1, in dem der Hauptoperator von β keine Konjunktion ist, fallen die vorläufige und die neue Definition der Folgerung zusammen. Setzt sich β jedoch aus zwei oder mehr Konjunktionsgliedern zusammen, so ist die neue Definition restriktiver. So fallen Argumente der Form $\neg A \Rightarrow (A \supset B) \;\&\; (A \supset C)$ nicht unter die neue Definition, da sich aus der Prämisse $\neg A$ und A, dem Antezedens des linken (und rechten) Konjunktionsglieds, die Kontradiktion $\neg A \;\&\; A$ ableiten lässt; dies verletzt Bedingung (2). Das obige Argument der Form $A \supset B, C \Rightarrow A \supset (C \;\&\; B)$ verletzt Bedingung (3), weil A, das Antezedens der Konklusion, für die Ableitung des linken Konjunktionsglieds C nicht benötigt wird. Auch $A \Rightarrow (B \vee \neg B) \;\&\; A$ verletzt Bedingung (3), weil die Prämisse A für die Ableitung des linken Konjunktionsglieds $(B \vee \neg B)$ entbehrlich ist.

5. Prädikatenlogische Folgerung

Die Definition der prädikatenlogischen Folgerung eines umgangssprachlichen Arguments, kurz: umgangssprachliche prädikatenlogische Folgerung, wirkt auf den ersten Blick etwas komplizierter als die Definition der aussagenlogischen Folgerung. Mit syntaktischen Verfahren ist aber genauso leicht feststellbar, ob eine Argumentform die Kriterien erfüllt.

> Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ Platzhalter für logische Formen der Prämissen, und sei $Q_1x_1, \ldots, Q_kx_k[\alpha_{m+1} \supset (\ldots \supset (\alpha_{m+n} \supset (\beta_1 \;\&\; \ldots \;\&\; \beta_i)) \ldots)]$ mit $Q \in \{\forall, \exists\}$, $k \geq 0$, $m \geq 1$, $n \geq 0$ und $i \geq 1$ ein Platzhalter für eine logische Pränexform der Konklusion, wobei β_1 bis β_i Teilformeln seien, deren Hauptoperator kein Konditional und keine Konjunktion ist. Sei χ ein Platzhalter für eine Variable. Sie ist frei, wenn sie nicht Teil einer Formel $\forall\chi\alpha$ oder $\exists\chi\alpha$ ist. Die Formel $\alpha[\chi/@]$ entstehe dadurch, dass in einer Formel α jedes Vorkommen von χ durch einen Namensbuchstaben (Individuenkonstante) @ ersetzt wird. Eine umgangssprachliche Konklusion folgt prädikatenlogisch aus umgangssprachlichen Prämissen genau dann, wenn mindestens eine prädikatenlogische Form der Prämissen und mindestens eine prädikatenlogische Pränexform der Konklusion den folgenden Bedingungen genügen:
>
> (1) Jede Interpretation, die allen Formeln der Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ den Wahrheitswert *wahr* zuweist, weist auch der Formel $Q_1x_1, \ldots, Q_kx_k [\alpha_{m+1} \supset (\ldots \supset (\alpha_{m+n} \supset (\beta_1 \;\&\; \ldots \;\&\; \beta_i)) \ldots)]$ den Wahrheitswert *wahr* zu.
>
> (2) Für jede Formel β_1 bis β_i der Form $Q_1x_1, \ldots, Q_kx_k[\gamma_1 \supset (\ldots \supset (\gamma_j \supset \delta) \ldots)]$ mit $Q \in \{\forall, \exists\}$, $k \geq 0$ und $j \geq 0$ gilt: Die Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n}, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_j\}$ ist erfüllbar. In dieser Menge kann jede (Teil-) Formel der Form $\exists\chi\alpha$ durch $\alpha[\chi/@]$ und jedes Vorkommen einer freien Variable durch einen Namensbuchstaben ersetzt werden, wobei alle Vorkommen derselben Variable durch denselben Namensbuchstaben zu ersetzen sind.

(3) Für jede Formel β_1 bis β_i der Form $Q_1x_1, \ldots, Q_kx_k[\Gamma_1 \supset (\ldots \supset (\Gamma_j \supset \Delta) \ldots)]$ mit Q ∈ {∀, ∃}, k ≥ 0 und j ≥ 0 gilt: Zu jeder echten Teilmenge Γ‘ der Menge $\Gamma = \{\alpha_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n}, \gamma_1, \ldots, \gamma_j\}$ gibt es jeweils mindestens eine Interpretation, die allen Formeln der Teilmenge Γ‘ den Wahrheitswert *wahr* und der Formel Δ den Wahrheitswert *falsch* zuweist. In Γ und δ kann jede (Teil-) Formel der Form $\exists\chi\alpha$ durch $\alpha[\chi/@]$ und jedes Vorkommen einer freien Variable durch einen Namensbuchstaben ersetzt werden, wobei alle Vorkommen derselben Variable durch denselben Namensbuchstaben zu ersetzen sind.

(1) Aus der Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ lässt sich die Formel $Q_1x_1, \ldots, Q_kx_k [\alpha_{m+1} \supset (\ldots \supset (\alpha_{m+n} \supset (\beta_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \beta_i)) \ldots)]$ ableiten.

(2) Für jede Formel β_1 bis β_i der Form $Q_1x_1, \ldots, Q_kx_k[\Gamma_1 \supset (\ldots \supset (\Gamma_j \supset \Delta) \ldots)]$ mit Q ∈ {∀, ∃}, k ≥ 0 und j ≥ 0 gilt: Aus der Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n}, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_j\}$ lässt sich keine Kontradiktion ableiten. In dieser Menge kann jede (Teil-) Formel der Form $\exists\chi\alpha$ durch $\alpha[\chi/@]$ und jedes Vorkommen einer freien Variable durch einen Namensbuchstaben ersetzt werden, wobei alle Vorkommen derselben Variable durch denselben Namensbuchstaben zu ersetzen sind.

(3) Für jede Formel β_1 bis β_i der Form $Q_1x_1, \ldots, Q_kx_k[\gamma_1 \supset (\ldots \supset (\gamma_j \supset \delta) \ldots)]$ mit Q ∈ {∀, ∃}, k ≥ 0 und j ≥ 0 gilt: Aus keiner echten Teilmenge Γ‘ der Menge $\Gamma = \{\alpha_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n}, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_j\}$ lässt sich die Formel δ ableiten. In Γ und δ kann jede (Teil-) Formel der Form $\exists\chi\alpha$ durch $\alpha[\chi/@]$ und jedes Vorkommen einer freien Variable durch einen Namensbuchstaben ersetzt werden, wobei alle Vorkommen derselben Variable durch denselben Namensbuchstaben zu ersetzen sind.

Die Definition nimmt Bezug auf die logische Pränexform (pränexe Normalform) der Konklusion. In einer Pränexform befindet sich eine Formel genau dann, wenn

- alle Quantoren am Anfang stehen,
- der Bindungsbereich der Quantoren die gesamte Formel umfasst,
- die Quantoren nicht negiert sind.

Viele Lehrbücher der Logik empfehlen, schon bei der prädikatenlogischen Formalisierung verneinte Quantoren zu vermeiden und alle Quantoren an den Anfang der Formel zu stellen. Wer sich an diesen Rat hält, gelangt meist automatisch zur logischen Pränexform. So würde man eine Aussage wie „Kein philosophisches System enthält keine Widersprüche“

nicht durch $\neg\exists x(Fx \,\&\, \neg Gx)$ formalisieren, sondern durch die Pränexform $\forall x(Fx \supset Gx)$. Gegebenenfalls lässt sich die Pränexform durch rekursive Anwendung einfacher Umformungsregeln ermitteln, wie sie in Lehrbüchern der Logik zu finden sind (z. B. Bucher 1998, S. 241-243). Wenn der Hauptoperator der Konklusion kein Quantor ist oder die Konklusion keine Quantoren enthält, fällt sie mit der Matrix $\alpha_{m+1} \supset (\ldots \supset (\alpha_{m+n} \supset (\beta_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \beta_i)) \ldots)$ zusammen. Insofern ist jede aussagenlogische Folgerung zugleich eine prädikatenlogische Folgerung.

Mit einem klassischen Kalkül des natürlichen Schließens lässt sich sehr leicht erkennen, dass ein Argument der Form $\forall xFx \Rightarrow Fa$ unter die Definition fällt, weil (1) Fa aus $\forall xFx$ ableitbar ist, (2) aus $\forall xFx$ und Fa keine Kontradiktion ableitbar ist und (3) $\forall xFx$ für die Ableitung von Fa benötigt wird. Anders verhält es sich mit Argumenten der Form (c) $\forall x\neg Fx \Rightarrow \forall x(Fx \supset Gx)$. Aus der Menge $\{\forall x\neg Fx, Fx\}$, also aus der Prämisse und dem Antezedens der Konklusion, lässt sich in einigen Kalkülen des natürlichen Schließens eine Kontradiktion ableiten, indem aus $\forall x\neg Fx$ die Formel $\neg Fx$ abgeleitet wird, die zu Fx in Widerspruch steht. Allerdings erlauben es nicht alle Kalküle, in der Allquantor-Beseitigung eine Formel mit einer freien Variable abzuleiten (Pelletier 2001, S. 119 f.). Der zweite Satz von Bedingung (2) trägt diesem Umstand Rechnung; er ermöglicht es, in der oben genannten Menge jedes Vorkommen einer freien Variable durch einen Namensbuchstaben zu ersetzen. Ersetzen wir in Fx die freie Variable x durch den Namensbuchstaben a, so erhalten wir die Menge $\{\forall x\neg Fx, Fa\}$, aus der sich in jedem Kalkül die Kontradiktion $\neg Fa \,\&\, Fa$ ableiten lässt. Damit verletzt (c) die Bedingung (2).

Das gleiche gilt für (d) $\exists x\neg Fx \Rightarrow \exists x(Fx \supset Gx)$. Aus der Menge $\{\exists x\neg Fx, Fx\}$, d. h. aus der Prämisse und dem Antezedens der Konklusion, lässt sich zwar nicht unmittelbar eine Kontradiktion ableiten. Der zweite Satz von Bedingung (2) erlaubt es jedoch, in dieser Menge jede (Teil-) Formel der Form $\exists\chi\alpha$ durch $\alpha[\chi/@]$ zu ersetzen. Die Formel $\alpha[\chi/@]$ erhalten wir, indem wir in α jedes Vorkommen von χ durch einen beliebigen Namensbuchstaben @ ersetzen. Damit dürfen wir das erste Element $\exists x\neg Fx$ durch $\neg Fa$ ersetzen. Des weiteren dürfen wir erneut jedes Vorkommen einer freien Variable durch einen Namensbuchstaben ersetzen. Wenn wir im zweiten Element Fx die freie Variable x durch den Namensbuchstaben a ersetzen, so erhalten wir die kontradiktorische Menge $\{\neg Fa, Fa\}$.

Wir kommen als Nächstes zu Argumentformen wie (g) $\forall xFx \Rightarrow \forall x(Gx \supset Fx)$, die Bedingung (3) verletzen. Hier umfasst die Menge Γ die Prämisse und das Antezedens der Konklusion, d. h. $\Gamma = \{\forall xFx, Gx\}$. Als δ gilt das Konsequens Fx. Der zweite Satz von Bedingung (3) ermöglicht es, in Γ und δ jedes Vorkommen der freien Variable x durch einen Namensbuchstaben wie a zu ersetzen. Machen wir davon Gebrauch, so stellt sich die Frage, ob sich $\delta = Fa$ aus einer echten Teilmenge von $\Gamma = \{\forall xFx, Ga\}$ ableiten lässt. Eine solche Teilmenge gibt es: Aus $\Gamma' = \{\forall xFx\}$ können wir Fa direkt ableiten.

Auch (h) $\exists xFx \Rightarrow \exists x(Gx \supset Fx)$ scheitert an Bedingung (3). Die Menge Γ umfasst die Prämisse und das Antezedens der Konklusion, d. h. $\Gamma = \{\exists xFx, Gx\}$. Als δ gilt das Konsequens Fx. Der zweite Satz von Bedingung (3) gestattet es, in Γ und δ jedes Vorkommen der freien Variable x durch den Namensbuchstaben a zu ersetzen, und ebenso dürfen wir die Formel $\exists xFx$ durch Fa ersetzen. Machen wir davon Gebrauch, so stellt sich die Frage, ob sich $\delta = Fa$ aus einer echten Teilmenge von $\Gamma = \{Fa, Ga\}$ ableiten lässt. Eine solche Teilmenge gibt es: $\Gamma' = \{Fa\}$. Damit haben wir für alle Argumente (a) bis (h) nachgewiesen, dass sie nicht unter die Definition der umgangssprachlichen prädikatenlogischen Folgerung fallen.

6. Eigenschaften der umgangssprachlichen logischen Folgebeziehung

In den vorigen Abschnitten wurde die logische Folgerung eines umgangssprachlichen Arguments als zweistellige Beziehung zwischen einer Menge umgangssprachlicher Prämissen und genau einer umgangssprachlichen Konklusion definiert. Diese umgangssprachliche logische Folgebeziehung, kurz: ULF, weist mehrere Gemeinsamkeiten mit der Folgebeziehung der klassischen modelltheoretischen Semantik auf. So bleiben beide Folgebeziehungen intakt, wenn

- die Prämissen in ihrer Reihenfolge vertauscht werden (Permutation),
- die Prämissen wiederholt werden,
- wiederholte Prämissen eliminiert werden (Kontraktion),
- weitere Prämissen hinzugefügt werden, d. h. wenn $\Gamma \Rightarrow \alpha$, dann $\Gamma \cup \Delta \Rightarrow \alpha$ (Monotonie).

Eine ULF kann jedenfalls als monoton gelten, wenn wir den Vorschlag aus dem 3. Abschnitt aufgreifen und kontradiktorisch entgegengesetzte Aussagen durch unterschiedliche Buchstaben formalisieren. Wenn wir uns auch gestatten, komplexen Aussagen der Form $A \supset A$ oder $A \equiv A$ die logische Form A zuzuweisen, so ist ULF reflexiv; d. h. jede Aussage folgt aus sich selbst. Im Gegensatz zur Folgebeziehung der klassischen modelltheoretischen Semantik ist eine ULF allerdings nicht transitiv. Für eine transitive Folgebeziehung gilt: Folgt aus bestimmten Prämissen eine Konklusion und aus dieser eine weitere Konklusion, dann folgt letztere aus den ursprünglichen Prämissen (wenn $\Gamma \Rightarrow \alpha$ und $\alpha \Rightarrow \beta$, dann $\Gamma \Rightarrow \beta$). Hat ein Argument widersprüchliche Prämissen, so ist die Transitivität der ULF nicht gewährleistet. Aus A & $\neg A$ folgt etwa A & $(\neg A \vee B)$, weil wir die widersprüchliche Prämisse auch durch A & C und die Konklusion durch A & $(C \vee B)$ formalisieren können. Aus A & $(\neg A \vee B)$ folgt per Disjunktivem Syllogismus B, aber aus A & $\neg A$ folgt unserer Definition zufolge keineswegs B. Aus demselben Grund sind übrigens auch die von Smiley und Tennant vorgeschlagenen Folgerungsbeziehungen nicht transitiv.

Anderson und Belnap (1975, S. 154) wenden dagegen ein: „Any criterion according to which entailment is not transitive, is *ispo facto* wrong.“ Eine Begründung für diese Behauptung haben wir allerdings in der gesamten Literatur nicht gefunden. Anderson und Belnap halten die Folgebeziehung einfach deshalb für transitiv, weil sie diese durch einen Kalkül definieren wollen und jeder ernstzunehmende Kalkül transitiv ist. Sobald wir aber von dem Vorhaben abrücken, einen Kalkül zu entwickeln, gibt es auch keinen Grund mehr für die Annahme, die Folgebeziehung umgangssprachlicher Argumente müsse transitiv sein (Smiley 1959, S. 242). Das vorige Beispiel veranschaulicht das Dilemma der von Anderson und Belnap begründeten Relevanzlogiken: Sie möchten den Schluss von widersprüchlichen Prämissen auf eine beliebige Konklusion unterbinden und zugleich einen transitiven und monotonen Kalkül entwickeln, in dem die Disjunktions-Einführung uneingeschränkt gilt. So bleibt ihnen nur die Möglichkeit, den Disjunktiven Syllogismus aufzugeben.

Relevanzlogiker nennen auch weitere, unabhängige Gründe gegen den Disjunktiven Syllogismus. So heißt es, in „inkonsistenten Situationen“ erlaube er Schlüsse von wahren Prämissen auf falsche Konklusionen; gemeint sind Situationen, in denen bestimmte Aussagen sowohl wahr als auch falsch sind oder in denen wahre Widersprüche vorliegen. Als Beispiele nennen die Relevanzlogiker widersprüchliche wissenschaftliche Theorien (Mortensen 1983, S. 37; vgl. Priest 2008, 8.6) sowie logische und mathematische Antinomien

(Routley 1982, S. 62 f.). Die meisten dieser Beispiele werden allerdings in wissenschaftlicher Terminologie formuliert und stammen nicht aus dem Bereich der Umgangssprache. Auf der anderen Seite gibt es starke Gründe für die Beibehaltung des Disjunktiven Syllogismus. Sowohl im Alltag als auch in den Wissenschaften wird diese Schlussregel regelmäßig eingesetzt, was selbst Relevanzlogiker wie Mortensen (1983, S. 37) zugeben müssen. Häufig haben wir die Wahl zwischen zwei Sachverhalten A oder B, die wir für wahr halten oder durch eine Handlung wahr machen können. Entscheiden wir uns gegen A, legen wir uns auf B fest – und umgekehrt. Solche Entscheidungen haben die logische Form des Disjunktiven Syllogismus. Deshalb ist der Disjunktive Syllogismus ein unverzichtbarer Bestandteil einer Logik der Umgangssprache.

In der Relevanzlogik sind auch bestimmte Schlüsse von Formeln mit Disjunktion auf Formeln mit Konditional ungültig, so etwa $A \vee B \Rightarrow \neg A \supset B$ und $A \supset B, C \supset D \Rightarrow (A \supset D) \vee (C \supset B)$. Auch dazu werden umgangssprachliche Gegenbeispiele mit scheinbar wahren Prämissen und falscher Konklusion vorgebracht. Da hier kein Raum ist, diese Argumente zu diskutieren, genüge der Hinweis: Es ist keinesfalls erforderlich, wegen dieser Schlüsse den Disjunktiven Syllogismus aufzugeben. Sie lassen sich auch in transitiven, monotonen Kalkülen mit Disjunktivem Syllogismus ausschließen; solche Kalküle gewährleisten allerdings keinen Informationstransfer, sondern lediglich Wahrheitstransfer, denn aus Widersprüchen lassen sich darin beliebige Konklusionen ableiten (Schamberger 2015, 3. Kapitel).

In diesem Artikel verfolgten wir das Ziel, den Begriff der logischen Folgerung für umgangssprachliche Argumente formal und präzise zu definieren. Die von uns vorgeschlagene Filterlogik ist anderen Vorschlägen in zwei Hinsichten überlegen: Zum einen ist sie angemessener, weil sie die problematischen Argumente der Form (a) bis (h) ausschließt, ohne die Disjunktions-Einführung einzuschränken. Zum anderen bietet sie formale und präzise Verfahren, mit denen sich auf einfache Weise feststellen lässt, ob die Kriterien der Folgerungsdefinition erfüllt sind oder nicht erfüllt sind.

Literatur

Adams, Ernest (1965): „The Logic of Conditionals“, in: *Inquiry* 8, 166-197.

Bucher, Theodor (1998): *Einführung in die angewandte Logik*, Berlin, New York.

Epstein, Richard L. (1990): *The Semantic Foundations of Logic*, Bd. 1: *Propositional Logics*, Dordrecht/Boston/London: Kluwer.

Geach, Peter (1981): „Entailment“, in: ders.: *Logical Matters*, Oxford: Basil Blackwell, S. 174-186.

Grice, Paul (1991): „Logic and Conversation“, in: ders.: *Studies in the Way of Words*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, S. 22-40.

Hardy, Jörg/Schamberger, Christoph (2012): *Logik der Philosophie. Einführung in die Logik und Argumentationstheorie*, Göttingen, Oakville.

Hitchcock, David (2007): „Informal Logic and The Concept of Argument“, in: Dale Jacquette (Hg.): *Philosophy of Logic*, Amsterdam/Oxford: Elsevier, S. 101-129.

Hoyningen-Huene, Paul (1988): *Formale Logik*, Stuttgart: Reclam.

Israel, David/Perry, John (1990): „What is Information?“, in: Philip Hanson (Hg.): *Information, Language and Cognition*, Vancouver: University of British Columbia Press, S. 1-19.

Mortensen, Chris (1983): „The Validity of Disjunctive Syllogism Is Not So Easily Proved“, in: *Notre Dame Journal of Formal Logic* 24, S. 35-40.

Orlowska, Ewa/Weingartner, Paul (1997): „Semantic Considerations on Relevance“, in: Wolfgang Lenzen (Hg.): *Das weite Spektrum der analytischen Philosophie*, Berlin/New York: de Gruyter, S. 250-261.

Pelletier, Francis Jeffry (2001): „A History of Natural Deduction and Elementary Logic Textbooks“, in: John Woods/Bryson Brown (Hg.): *Logical Consequence: Rival Approaches*, Oxford: Hermes Science, S. 105-138.

Priest, Graham (2008): *An Introduction into Non-Classical Logic. From If to Is*, Cambridge: Cambridge University Press.

Routley, Richard (1982): *Relevant Logics and their Rivals*, Bd. 1: *The Basic Philosophical and Semantical Theory*, Atascadero: Ridgeview.

Schamberger, Christoph (2015): *Logik der Umgangssprache*, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht unipress.

Scheffler, Uwe/Shramko, Yaroslaw (1998): „Eine generelle Informationssemantik für Systeme der logischen Folgebeziehung", in: Uwe Scheffler und Klaus Wuttich (Hg.): *Terminigebrauch und Folgebeziehung*, Berlin: Logos, S. 229-247.

Schurz, Gerhard (1991): „Relevant Deduction", in: *Erkenntnis* 35, S. 391-437.

\- (1999): „Relevance in Deductive Reasoning: a Critical Overview", in: ders. und Marco Uršic (Hg.): *Beyond Classical Logic. Philosophical and Computational Investigations in Deductive Reasoning and Relevance*, Sankt Augustin: Academia, S. 9-56.

Sinowjew, Alexander Alexandrowitsch (1970): *Komplexe Logik. Grundlagen einer logischen Theorie des Wissens*, Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Smiley, Timothy (1959): „Entailment and Deducibility", in: *Proceedings of the Aristotelian Society* 59, 233-254.

Strawson, Peter F. (1952): *Introduction to Logical Theory*, London.

\- (1986): „'If' and '⊃'", in: Richard E. Grandy und Richard Warner (Hg.): *Philosophical Grounds of Rationality. Intentions, Categories, Ends*, Oxford u. a.: Oxford University Press, S. 229-242.

Tarski, Alfred (1936): „Über den Begriff der logischen Folgerung", in: *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique*, Bd. 7, 1-11.

Tennant, Neil (1987): *Anti-Realism and Logic. Truth as Eternal*, Oxford u. a.: Oxford University Press.

\- (2005): „Relevance in Reasoning", in: Stewart Shapiro (Hg.): *Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford u. a.: Oxford University Press, S. 696-726.

Tugendhat, Ernst/Wolf, Ursula (1983): *Logisch-semantische Propädeutik*, Stuttgart: Reclam.

Wagner, Gerd (1991): „Ex contradictione nihil sequitur", in: John Mylopoulos und Ray Reiter (Hg.): *Proceedings of the 12th international joint conference on Artificial intelligence*, Bd. 1, San Francisco: Morgan Kaufmann, S. 538-543.

Weingartner, Paul (2000): „Reasons for Filtering Classical Logic", in: Diderik Batens u. a. (Hg.): *Frontiers of Paraconsistent Logic*, Baldock: Research Studies Press, S. 315-327.

Weingartner, Paul/Schurz, Gerhard (1986): „Paradoxes solved by simple Relevance Criteria“, in: *Logique et analyse* 29, S. 3-40.

Wessel, Horst (1998): *Logik*, Berlin: Logos.

Wright, Georg Henrik von (1957): „Entailment“, in: ders.: *Logical Studies*, London: Routledge and Kegan Paul, S. 166-191.